

Algèbre linéaire

Test intermédiaire

MT

Automne 2024

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème composante de $\mathbf{x}$.
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la deuxième ligne de P est

- | | |
|---|---|
| ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. | ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. |
| ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. | ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. |

Question 2 : Soit $\mathcal{B} = (2 - t, t + t^2, -1 + t^3, -1 - t + 2t^2)$ une base ordonnée de $\mathbb{P}_3$. La quatrième coordonnée du polynôme $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est égale à

- | | | | |
|---------------------------------|--|---|--------------------------------|
| ☐ -7 . | ☐ $\frac{1}{7}$. | ☐ $-\frac{1}{7}$. | ☐ 3 . |
|---------------------------------|--|---|--------------------------------|

Question 3 : Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ x - y \\ -5x + 6y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Alors

- | | |
|---|---|
| ☐ T est injective mais pas surjective. | ☐ T est surjective mais pas injective. |
| ☐ T est injective et surjective. | ☐ T n'est ni injective ni surjective. |

Question 4 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

- | | | | |
|--|--|--|--|
| ☐ $\det(A) = 0$. | ☐ $\det(A) = 12\pi$. | ☐ $\det(A) = -6\pi$. | ☐ $\det(A) = \sqrt{6}\pi$. |
|--|--|--|--|

Question 5 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

$$\square \quad b_{33} = \frac{4}{39}. \quad \square \quad b_{41} = \frac{1}{3}. \quad \square \quad b_{33} = -\frac{1}{13}. \quad \square \quad b_{43} = \frac{2}{3}.$$

Question 6 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 et soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow W$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a & b - c \\ b - c & a + b + c \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$\mathcal{B} = (1, 1 - t, t + t^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

des bases ordonnées de $\mathbb{P}_2$ et W respectivement. La matrice $A = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ et la base $\mathcal{C}$ de W , telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

$$\square \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \square \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Question 7 : Soient U , V et W des espaces vectoriels. Soient $T: U \rightarrow V$ et $S: V \rightarrow W$ deux applications (pas forcément linéaires) et $S \circ T: U \rightarrow W$ l'application composée. Alors

- ☐ si $S \circ T$ est l'application nulle, alors S et T sont nulles.
- ☐ si S et T sont linéaires, alors $S \circ T$ est linéaire.
- ☐ si $S \circ T$ est l'application nulle, alors S ou T est nulle.
- ☐ si $S \circ T$ est linéaire, alors T et S sont linéaires.

Question 8 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

$$\square \quad x_1 = 3. \quad \square \quad x_1 = -3. \quad \square \quad x_1 = -2. \quad \square \quad x_1 = 2.$$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$ telles que $A + B$ n'est pas la matrice nulle, alors $A + B$ est aussi inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$. Si la forme échelonnée réduite de A possède exactement k lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si A est telle que $A^5 = 0$, alors T est surjective.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire. Si $\dim(\text{Ker } T) = \dim V$, alors $\text{Im } T = \{\mathbf{0}_W\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit q un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3 \mid q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 : Soit $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, alors $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$, $A\mathbf{w}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 15 : Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors

$$\det(A - A^T) = \det(A) - \det(A^T).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_5$ engendré par $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5$. Si $\dim(W) = 4$, alors il existe deux polynômes $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5$ tels que la famille $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ est une base de $\mathbb{P}_5$.

☐ VRAI ☐ FAUX