

Algèbre linéaire

Test intermédiaire

MT

Automne 2023

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème composante de $\mathbf{x}$.
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $M_{m \times n}$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 4z = a \\ x - z = 2 \end{cases}$$

possède des solutions si et seulement si

☐ $a = \frac{9}{2}.$

☐ $a = -\frac{9}{2}.$

☐ $a = \frac{2}{9}.$

☐ $a = -\frac{2}{9}.$

Question 2 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ T est injective et surjective.

☐ T n'est ni injective ni surjective.

☐ T est surjective mais pas injective.

☐ T est injective mais pas surjective.

Question 3 : Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow M_{2 \times 2}$ l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{P}_2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = (1, t + t^2, t - t^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

des bases ordonnées de $\mathbb{P}_2$ et $M_{2 \times 2}$ respectivement. La matrice $A = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ et la base $\mathcal{C}$ de $M_{2 \times 2}$, telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Question 4 : Soit t un paramètre réel. Les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si et seulement si

☐ $t \neq -5$.

☐ $t = -5$.

☐ $t \neq 5$.

☐ $t = 5$.

Question 5 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la troisième colonne de P est

☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Question 6 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & 3b & c \\ d+2a & 3e+6b & f+2c \\ g & 3h & k \end{pmatrix}$$

deux matrices de taille 3×3 . Si $\det(A) = 1$, alors on a

☐ $\det(B) = 6$.

☐ $\det(B) = 3$.

☐ $\det(B) = 2$.

☐ $\det(B) = 1$.

Question 7 : Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

☐ $r_{14} = -3$.

☐ $r_{14} = -6$.

☐ $r_{14} = -4$.

☐ $r_{14} = 0$.

Question 8 : L'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $(A + B)^2$ est inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soient V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Soit d la dimension de l'image de T . Alors $d \leq \dim W$ et $d \leq \dim V$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : L'ensemble $\{p \in \mathbb{P}_n : p(-t) = -p(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs de V . Si toute sous-famille de $\mathcal{F}$ formée de $n-1$ éléments est linéairement indépendante, alors $\mathcal{F}$ est une base de V .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Si A est une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes forment une base de $\mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une solution unique.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 : Si A est une matrice de taille $m \times n$, alors on a

$$\dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\operatorname{Im} A^T) + \dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Ker} A^T) = m + n.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 15 : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Si R est la forme échelonnée réduite de A , alors

$$\det(A) = \det(R).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Soit $W = \{A \in M_{2 \times 2} : A = A^T\}$. Alors W est un sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}$ de dimension 3.

☐ VRAI ☐ FAUX