Exercices — Série 14

Mots-clés: décomposition en valeur singulières, chaînes de Markov discrètes.

Question 1

Pour les matrices ci-dessous déterminer

$$\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} \text{ et } \min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution:

a) Les valeurs propres de A^TA sont 18^2 et 5^2. Les valeurs de $\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$ et $\min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$ sont données respectivement par la racine carrée de la plus grande et de la plus petite valeur propre de la matrice A^TA. Il s'ensuit que
$\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 18$ et $\min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 5$.

b) Les valeurs propres de $A^TA = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}$ sont 90 et 10.
Donc, $\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 3\sqrt{10}$ et $\min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = \sqrt{10}$.

c) Les valeurs propres de $A^TA = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ sont $25, 9$ et 0.
Donc, $\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 5$ et $\min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 0$.

Question 2

Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution:

a) Pour la matrice A. Les valeurs propres de A^TA sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$. On obtient $\sigma_1 = 2$ et $\sigma_2 = 0$. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

On calcule ensuite $Av_1 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $Av_2 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. On cherche une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, on prend $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ pour complèter le vecteur Av_1. On obtient facilement

$$U = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Pour la matrice B. On a $B^TB = \begin{pmatrix}81 & -27\\-27 & 9\end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 90$ et $\lambda_2 = 0$. On calcule les vecteurs propres v_1, v_2, et on les normalise. On obtient la matrice V

$$V = \begin{pmatrix}-3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10}\end{pmatrix}$$

On a

$$\Sigma = \begin{pmatrix}3\sqrt{10} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

On calcule Bv_1 et Bv_2

$$Bv_1 = \begin{pmatrix}10\\-20\\-20\end{pmatrix} \text{ et } Bv_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On a que $\{Bv_1\}$ est une base de $\mathrm{Im}(B)$. On doit la complèter avec deux vecteurs orthogonaux. Comme condition on a $w \cdot Bv_1 = 0$ ce qui donne $x - 2y - 2z = 0$. On trouve

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux entre eux. On doit faire Gram-Schmidt. On obtient

$$U = \begin{pmatrix}1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45}\\-2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{5}\\-2/3 & 0 & 5/\sqrt{45}\end{pmatrix}$$

c) On calcule $C^TC = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$. Les vecteurs propres de C^TC correspondants sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a obtenu les colonnes de la matrice V. Pour la matrice U qui est 3×3, il nous faut

$$Cv_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } Cv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{Cv_1, Cv_2\}$ est une base orthogonale de $\mathrm{Im}(C)$. Mais il nous manque un vecteur orthogonal aux deux autres pour avoir une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. On sait que $w \cdot Cv_1 = 0$ et $w \cdot Cv_2 = 0$. On obtient un système à résoudre (en posant $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Un vecteur w possible est $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, que l'on normalise pour trouver les colonnes de U:

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Finalement la matrice Σ est

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 3 Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution:

i) On calcule: $A^TA = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A^TA sont $18, 0$, avec pour vecteurs propres normalisés associés $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on ordonne les valeurs singulières

dans l'ordre décroissant), et on obtient ainsi la matrice orthogonale V:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice U s'obtient en normalisant les vecteurs Av_i avec v_i associé à une valeur singulière non nulle, ici il y en a un seul: $Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$u_1 := \frac{1}{\|Av_1\|} Av_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les autres colonnes de U s'obtiennent en étendant la famille $\{u_1\}$ à une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Il faut donc trouver deux vecteurs normés u_2, u_3 orthogonaux solutions de l'équation $u_1 \cdot x = 0$. Une base de solution est

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonomaliser la famille $\{w_1, w_2\}$. On obtient $u_2 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_2 - \frac{w_1 \cdot w_2}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d'où en normalisant $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On obtient ainsi la matrice $U = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$. Finalement, la décomposition $A = U\Sigma V^T$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarque: il y une infinité de solutions possibles pour u_2, u_3.

ii) On calcule: $A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $A^T A$ sont $25, 9, 0$, avec pour vecteurs propres normalisés associés $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 =$

$\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$. Ainsi, $\Sigma = \begin{pmatrix}\sqrt{25} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{9} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$ (on ordonne les valeurs singulières dans l'ordre décroissant), et on obtient ainsi la matrice orthogonale V:

$$V = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

La matrice U s'obtient en normalisant les vecteurs Av_i avec v_i associé à une valeur singulière non nulle, ici: $Av_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $Av_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Ainsi

$$u_1 = \frac{1}{\|Av_1\|}Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\|Av_2\|}Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la matrice $U = (u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Finalement, la décomposition $A = U\Sigma V^T$ s'écrit

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Question 4 Soit A une matrice de taille $n \times n$.

i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A, donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1}.

Solution:

i) On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières. On a $\det(A) = \det(U)\det(\Sigma)\det(V)$, avec $\det(U) \neq 0$ et $\det(V) \neq 0$ (car U et V sont inversibles), ainsi

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(\Sigma) \neq 0$$

et A est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont non nulles.

ii) On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières, inversible d'après la question i). Ainsi, en inversant cette relation (on utilise $U^{-1} = U^T$ et $V^{-1} = V^T$), on obtient la décomposition en valeurs singulières cherchée $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.

Question 5 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si A est une matrice de taille $n \times n$ telle que 0 est l'unique valeur propre de A, alors $A = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

b) Si A est une matrice symétrique de taille $n \times n$ telle que 0 est l'unique valeur propre de A, alors $A = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

c) La matrice d'une forme quadratique est symétrique.

■ VRAI ☐ FAUX

d) Une forme quadratique définie positive satisfait $Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

☐ VRAI ■ FAUX

e) Si les valeurs propres d'une matrice symétrique A sont toutes strictement positives, alors la forme quadratique x^TAx est définie positive.

■ VRAI ☐ FAUX

f) Si les coefficients de A (symétrique) sont tous ≥ 0 alors $q(x) = x^TAx$ est définie positive.

☐ VRAI ■ FAUX

Solution:

a) Faux: par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Vrai. Comme A est symétrique, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable: $A = PDP^T$ où D est une matrice diagonale dont les valeurs diagonales sont les valeurs propres. D'après l'hypothèse $D = 0$ (la matrice nulle) et donc $A = 0$ aussi.

c) Vrai, par définition.

d) Faux: pour le vecteur nul on a toujours $Q(x) = 0$.

e) Vrai: c'est une conséquence du théorème de diagonalisation orthogonale vue en classe (les deux conditions sont même équivalentes).

f) Faux: par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a comme valeurs propres $\lambda = \pm 1$ elle est donc non définie.

Question 6 Considérons une matrice $P = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont des nombres compris entre 0 et 1.

a) Est-ce que P est une matrice de transition?

b) Trouver les valeurs propres de P en fonction de p et q.

c) Expliquer pourquoi P est diagonalisable (pour tous choix de p et q)

d) Diagonaliser P en fonction de p et q.

e) Donner des conditions sur p et q pour l'existence de $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} P^k$.

f) Calculer $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} P^k$ lorsque cette limite existe.

Solution:

a) Oui il s'agit d'une matrice de transition car les coefficients de P sont positifs et la somme des coefficients de chaque colonne de P vaut 1.

b) On calcule le polynôme caractéristique de P:

$$\det(P - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - (1-p-q)).$$

On trouve donc les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1 - p - q$.

c) Si $p + q \neq 0$ alors $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et donc P est diagonalisable (matrice de taille 2×2 ayant 2 valeurs propres distinctes). Si $p + q = 0$, comme les nombres p, q sont positifs, implique que $p = q = 0$ auquel cas la matrice $P = I_2$ qui est déjà diagonale.

d) Si $p + q \neq 0$ on cherche les espaces propres associés à $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1 - p - q$ et on trouve respectivement:

$$E_1 = \{t(q,p) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad E_{1-p-q} = \{t(-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

On a donc la matrice de passage S, son inverse et la matrice diagonale D comme suit:

$$S = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$$

Avec ces matrices on a $P = SDS^{-1}$ et $D = S^{-1}PS$.

e) Pour tout entier k on a l'égalité $P^k = SD^kS^{-1}$. Donc $\lim_{k\longrightarrow\infty} P^k$ existe si et seulement si $\lim_{k\longrightarrow\infty}(1-p-q)^k$ existe. Comme $-1 \leq 1-p-q \leq 1$, on voit que cette dernière limite existe si $p+q \neq 2$. Ainsi on a $\lim_{k\longrightarrow\infty}(1-p-q)^k = 1$ si $p+q=0$ et $\lim_{k\longrightarrow\infty}(1-p-q)^k = 0$ si $p+q \neq 0$

f) Si $0 < p+q < 2$ de l'égalité $P^k = SD^kS^{-1}$ et des points précédents on tire

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} P^k = \lim_{k\longrightarrow\infty} SD^kS^{-1} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$$

Si $p+q=0$ alors $p=q=0$ et $P = I_2$

Question 7 On considère la population d'une région, divisée en population rurale et population urbaine. On note $R(n)$ et $U(n)$ les populations rurales et urbaines à l'année n. On notera par a le taux d'exode rural annuel et par b le taux d'exode urbain (que l'on supposera constants).

(a) Écrivez des équations qui expriment $R(n+1)$ et $U(n+1)$ en fonction de $R(n), U(n), a$ et b.

(b) Écrivez ces équations en une seule équation matricielle.

(c) Prenons les valeurs $a = 0.2$ et $b = 0.1$, ainsi que $R(0) = 100000 = U(0)$. Calculez la population rurale et urbaine à la troisième année.

(d) Donnez une formule qui permet de calculer $R(n)$ et $U(n)$ pour tout entier n.

Solution:

(a) On trouve $R(n+1) = (1-a)R(n) + bU(n)$ et $U(n+1) = aR(n) + (1-b)U(n)$.

(b) Posons $X_n = \begin{pmatrix} R(n) \\ U(n) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$. Alors les équations ci-dessus s'écrivent $AX_n = X_{n+1}$. Ou encore

$$\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R(n) \\ U(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(n+1) \\ U(n+1) \end{pmatrix}.$$

(c) On a ici $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 100'000 \\ 100'000 \end{pmatrix}$.

On calcule alors $X_3 = A^3 X_0 = \begin{pmatrix} 0.562 & 0.219 \\ 0.438 & 0.781 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100'000 \\ 100'000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78'100 \\ 121'900 \end{pmatrix}$

(d) Grâce à la formule de diagonalisation trouvéee à l'exercice 6 on a $A^n = SD^nS^{-1} =$

$$\frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{pmatrix}$$

et $X_n = A^n X_0$

Question 8

Après une étude sur 100 ans sur la succession de jours *pluvieux* et *secs* dans une ville on a récolté les statistiques suivantes:

- Si un jour est sec on a 75% de chances que le jour d'après soit sec aussi.
- Si un jour est pluvieux on a 66, 2% de chances que le jour suivant soit pluvieux également.

a) Décrire la situation en proposant un modèle de Markov et sa matrice de transition.

b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, calculer la probabilité qu'il pleuve dans 1,2,3 et 10 jours.

c) Est-ce que la probabilité qu'il fasse beau dans k jours tend vers une certaine valeur lorsque k tend vers l'infini? Si oui calculer cette valeur.

Indication: On pourra s'aider des résultats de l'exercice 6.

Solution:

a) Notons $sec(k)$ (resp. $pluie(k)$) la probabilité qu'il ne pleuve pas (resp. qu'il pleuve) dans k jours et posons

$$x(k) = \begin{pmatrix} sec(k) \\ pluie(k) \end{pmatrix}$$

On a que $x(k) = P^k x(0)$ où P est la matrice de transition donnée à l'exercice 1 pour des valeurs de $p = 0.25$ et $q = 0.338$ soit

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.338 \\ 0.25 & 0.662 \end{pmatrix}$$

b) On utilise les calculs et les notations de l'exercice ci-dessus. On doit calculer la deuxième coordonnée du vecteur $x(i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et 10. Puisque P est diagonalisable on a $P = SDS^{-1}$ et donc $P^k = SD^kS^{-1}$. Pour $k = 10$ par exemple on trouve

$$P^{10} = SD^{10}S^{-1} = \begin{pmatrix} 0.57489 & 0.57475 \\ 0.42511 & 0.42525 \end{pmatrix}$$

et donc $x(10) = P^{10}x(0) = \begin{pmatrix} 0.57489 \\ 0.42511 \end{pmatrix}$. D'où la probabilité cherchée $pluie(10) = 0.42511$.

c) Oui, d'après l'exercice 1 puisque $p + q \neq 2$. On a la valeur du vecteur stationnaire:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x(k) = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.57483 \\ 0.42517 \end{pmatrix}$$

Donc la probabilité qu'il fasse beau dans k jours tend vers 0.57483 quand k tend vers l'infini.

Question 9 [Exercice facultatif (plus difficile)]
Deux chiens[a] se partagent n puces. À chaque instant une des n puces au hasard saute d'un chien à l'autre. Choisissons de regarder un seul des deux chiens et de compter le nombre de puces qu'il a sur le dos. On notera E_i l'état dans lequel le chien en question a exactement i puces sur son dos.

a) Exprimer les probabilités de transition $p_{i,i+1}$ et $p_{i,i-1}$ pour tout i.

b) Quelles sont les autres probabilités de transition?

c) Écrire la matrice de transition pour $n = 4$.

d) Trouver un vecteur stationnaire pour la matrice de transition.

e) Généraliser les deux points ci-dessus à tout n.

[a] Cet exemple est tiré de l'article *Chaîne de Markov* sur Wikipedia. Une version plus sérieuse de ce modèle – avec des boules et des urnes – a été proposée pour la première fois par Paul et Tatjana Ehrenfest in *Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem.* Physikalische Zeitschrift, vol. 8 (1907), pp. 311 –314.

Solution:

a) Notons tout d'abord qu'il existe $n + 1$ états pour notre chien : il peut avoir 0 puces sur le dos (état E_0), 1, ..., jusqu'à n puces (état E_n). Les probabilités de transition $p_{i,i+1}$ et $p_{i,i-1}$ sont les probabilités de passer de l'état E_i respectivement à l'état E_{i+1} et à l'état E_{i-1} à l'instant suivant. Distinguons les différents cas :

- Si $0 < i < n$, alors les états E_{i+1} et E_{i-1} existent bien. Supposant que les n puces ont la même probabilité de sauter d'un chien à l'autre, on obtient une probabilité i/n que la puce qui saute appartienne au chien considéré et $(n-i)/n$ à l'autre chien. Dans le premier cas, on aboutit à l'état E_{i-1}, et dans le deuxième cas, à l'état E_{i+1}. Par conséquent :

$$p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{n}, \qquad p_{i,i-1} = \frac{i}{n}.$$

- Si $i = 0$, alors E_{i-1} n'existe pas, et à l'instant suivant une puce sautera forcément sur notre chien :

$$p_{i,i+1} = p_{0,1} = 1 = 1 - \frac{i}{n}.$$

- Si $i = n$, alors E_{i+1} n'existe pas, et à l'instant suivant une puce quittera forcément notre chien pour sauter sur l'autre :

$$p_{i,i-1} = p_{n,n-1} = 1 = \frac{i}{n}.$$

b) D'après les données du problème, toutes les autres probabilités de transition sont nulles : à chaque instant, le chien gagne ou perd exactement une puce.

c) En utilisant les résultats des questions précédentes, on calcule la matrice de transition pour $n = 4$, qui est de taille 5×5 :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Pour trouver un vecteur stationnaire, on résout le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{aligned} 0.25x_1 &= x_0, \\ x_0 + 0.5x_2 &= x_1, \\ 0.75x_1 + 0.75x_3 &= x_2, \\ 0.5x_2 + x_4 &= x_3, \\ 0.25x_3 &= x_4. \end{aligned}$$

Prenons par exemple $x_0 = 1$, on déduit :

$$\begin{aligned} x_1 &= 4, \\ x_2 &= 6, \\ x_3 &= 4, \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Au passage, on reconnaît les coefficients binomiaux: $x_i = C_4^i$ pour $0 \leq i \leq 4$. Enfin, on normalise ce vecteur propre en divisant par la somme des composantes $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$, ce qui donne le vecteur stationnaire :

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/4 \\ 3/8 \\ 1/4 \\ 1/16 \end{pmatrix}.$$

e) Pour n général, la matrice s'écrit d'après les questions 1/ et 2/ :

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{n} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver un vecteur propre de P_n pour la valeur 1 : $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, on commence par poser $x_0 = 1$ comme précédemment, on obtient ensuite successivement :

$$x_1 = n, \qquad \frac{2x_2}{n} + 1 = n \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{n(n-1)}{2},$$

et on reconnaît ici aussi les premiers coefficients binomiaux qui s'écrivent de façon générale $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. En fait, ceux-ci sont bien solution du système grâce à la propriété :

$$\begin{aligned} p_{i+1,i} C_n^{i+1} + p_{i-1,i} C_n^{i-1} &= \frac{i+1}{n} C_n^{i+1} + \frac{n-i+1}{n} C_n^{i-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{n-i}{n} + \frac{i}{n} \right) \end{aligned}$$

Et donc nous avons que

$$\boxed{p_{i+1,i}C_n^{i+1} + p_{i-1,i}C_n^{i-1} = C_n^i.}$$

Ainsi, on vérifie par le calcul que le vecteur $X_n = (C_n^i)_{0\leq i\leq n}$ est un vecteur propre de P_n pour la valeur propre 1. Pour trouver un vecteur stationnaire, on normalise X en divisant chacune des composantes par leur somme : comme on sait que

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n,$$

on obtient comme vecteur stationnaire pour le modèle de Ehrenfest :

$$v_n = 2^{-n}\begin{pmatrix} 1 \\ n \\ C_n^2 \\ \vdots \\ C_n^i \\ \vdots \\ C_n^n \end{pmatrix}.$$

♣ Toute l'équipe vous souhaite une bonne nouvelle année ♣
et tous nos vœux de réussite pour les examens!