Durée : 60 minutes

EPFL

Algèbre linéaire
Test intermédiaire
GM
Automne 2024

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m\times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = P_{\mathcal{CB}}$ la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la deuxième ligne de P est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit $\mathcal{B} = \left(2-t,\ t+t^2,\ -1+t^3,\ -1-t+2t^2\right)$ une base de $\mathbb{P}_3$. La quatrième coordonnée du polynôme $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est égale à

☐ -7 ☐ $\frac{1}{7}$ ☐ $-\frac{1}{7}$ ☐ 3

Question 3 : Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \\ -5x+6y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ T est injective mais pas surjective ☐ T est surjective mais pas injective

☐ T est injective et surjective ☐ T n'est ni injective ni surjective

Question 4 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ $\det(A) = 0$ ☐ $\det(A) = 12\pi$ ☐ $\det(A) = -6\pi$ ☐ $\det(A) = \sqrt{6}\pi$

Question 5 : Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

☐ $b_{33} = \frac{4}{39}$ ☐ $b_{41} = \frac{1}{3}$ ☐ $b_{33} = -\frac{1}{13}$ ☐ $b_{43} = \frac{2}{3}$

Question 6 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille $2{\times}2$ et soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to W$ l'application linéaire définie par
$$T(a+bt+ct^2) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ b-c & a+b+c \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } a,b,c \in \mathbb{R}.$$
Soient
$$\mathcal{B} = \bigl(1,\, 1-t,\, t+t^2\bigr) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
des bases de $\mathbb{P}_2$ et W respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ et la base $\mathcal{C}$ de W, telle que $\bigl[T(p)\bigr]_{\mathcal{C}} = A\bigl[p\bigr]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Question 7 : Le système d'équations linéaires
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$
possède une solution unique telle que

☐ $x_1 = 2$ ☐ $x_1 = -3$ ☐ $x_1 = -2$ ☐ $x_1 = 3$

Question 8 : Soit t un paramètre réel. Les vecteurs
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$
sont linéairement dépendants si et seulement si

☐ $t = 5$ ☐ $t = -5$ ☐ $t \neq 5$ ☐ $t \neq -5$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n\times n$ telles que $A+B$ n'est pas la matrice nulle, alors $A+B$ est aussi inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit A une matrice de taille $m\times n$ avec $m<n$. Si la forme échelonnée réduite de A possède exactement k lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène $A\vec{x}=\vec{0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-k$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit A une matrice de taille $n\times n$ et soit $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x})=A\vec{x}$, pour tout $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. Si A est telle que $A^5=0$, alors T est surjective.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soit $T\colon V\to W$ une application linéaire.
Si $\dim(\operatorname{Ker} T)=\dim V$, alors $\operatorname{Im} T=\{\vec{0}_W\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit q un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p\in\mathbb{P}_3 \mid q(0)-p(0)=0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 : Soit $A\in\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, alors $A\vec{u}$, $A\vec{v}$, $A\vec{w}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 15 : Si $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors

$$\det(A-A^\top)=\det(A)-\det(A^\top).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_5$ engendré par $p_1,p_2,p_3,p_4\in\mathbb{P}_5$. Si $\dim(W)=4$, alors il existe deux polynômes $p_5,p_6\in\mathbb{P}_5$ tels que la famille $\mathcal{B}=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6\}$ est une base de $\mathbb{P}_5$.

☐ VRAI ☐ FAUX