

Série 8

Cette série suit le chapitre 4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *espace vectoriel, sous-espace vectoriel, application linéaire, noyau, image, base, coordonnées*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Sous-espace vectoriel)

Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

Exercice 2 (Axiomes)

Soit V un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. En n'utilisant QUE les 10 axiomes d'un espace vectoriel, montrer les propriétés suivantes. Notons l'élément nul de V avec 0_V , afin de le distinguer de 0.

- a) L'élément inverse de $v \in V$ est unique.
- b) $0v = 0_V$ et $0_V = -0_V$.
- c) $\alpha 0_V = 0_V$.
- d) $(-1)v = -v$.

Exercice 3 (Sous-espace vectoriel)

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T : V \rightarrow W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Exercice 4 (Base)

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

- a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?
 - (i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.
 - (ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.
- b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Exercice 5 (Indépendance linéaire)

On rappelle que $C^0([0, 1])$ est l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

- a) Soit $f, g \in C^0([0, 1])$ définie par $f(t) = \sin t$ et $g(t) = \cos t$. La famille $\{f, g\}$ est-elle libre ou liée ?
- b) Même question pour $\{f, g, h\}$ où $f(t) = \sin t$, $g(t) = \sin t \cos t$, et $h(t) = \sin 2t$.
- c) Pour les applications $T : C^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes, déterminer celles qui sont linéaires. Pour celles qui ne le sont pas, trouver un contre exemple.
 - 1) $T_1(f) := \int_0^1 f(t) dt$
 - 2) $T_2(f) := \max_{t \in [0, 1]} f(t)$
 - 3) $T_3(f) := f(1/2)$.

Exercice 6 (Ker(A), Im(A))

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\text{Ker}(A)$ et de $\text{Im}(A)$.

Exercice 7 (Indépendance linéaire)

Soit $M_{2 \times 2}$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 .

- a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.
- b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $M_{2 \times 2}$.

Exercice 8 ($\text{Ker}(\mathbf{A})$, $\text{Im}(\mathbf{A})$)

Soit $\mathbb{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on admet que c'est un espace vectoriel. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

- a) Vérifier que T est linéaire.
- b) Trouver une base de $\text{Ker } T$.
- c) Trouver une base de $\text{Im } T$.

Exercice 9 (Coordonnées)

- a) On considère le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- b) Même question pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ donnée par

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (Sous-espaces vectoriels)

Soit V un espace vectoriel et U, W des sous-espaces de V .

- a) Montrer que l'intersection $U \cap W$ est encore un sous-espace de V .
- b) Montrer qu'en général la réunion $U \cup W$ n'est pas un sous-espace de V (donner un contre-exemple explicite, par exemple dans l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^2$).
- c) On pose $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$. Autrement dit $U + W$ est constitué de tous les vecteurs qui sont sommes d'un vecteur de U et d'un vecteur de W . Montrer que $U + W$ est un sous-espace de V .

- d) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on définit les sous-espaces $U = \text{Vect}\{\vec{u}\}$ et $W = \text{Vect}\{\vec{w}\}$. Décrire $U \cup W$ et $U + W$.

Remarque. En fait $U + W$ est le plus petit sous-espace qui contient $U \cup W$.

Exercice 11 (Im(A), Ker(A))

Soient

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si $\vec{w}$ est dans $\text{Im}A$, dans $\text{Ker}A$ ou bien dans les deux.

Exercice 12 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. | ☐ | ☐ |
| b) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. | ☐ | ☐ |
| c) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. | ☐ | ☐ |
| d) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. | ☐ | ☐ |
| e) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. | ☐ | ☐ |
| f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. | ☐ | ☐ |

Exercice 13 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Si deux lignes d'une matrice de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det A = 0$. | ☐ | ☐ |
| b) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$. | ☐ | ☐ |
| c) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det A = 2$ et $\det B = 5$, alors $\det(A + B) = 7$. | ☐ | ☐ |
| d) Si A est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors A est inversible. | ☐ | ☐ |

Exercice 14 (QCM)

- a) Soit a, b, c des nombres réels. On considère les quatre polynômes $p(t) = t^2 + t + 1$, $q(t) = t^2 + 2t + a$, $r(t) = t^3 + b$ et $s(t) = t + c$. Alors
- ☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;
 - ☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;
 - ☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est toujours linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_4$;
 - ☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_3$ lorsque $a - c - 1 \neq 0$.
- b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes
- ☐ pour toutes valeurs de a, b .
 - ☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b .
 - ☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.
 - ☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.
- c) Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.
- ☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V .
 - ☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V , alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t .
 - ☐ Soit p un vecteur de l'espace vectoriel V des polynômes de degré ≤ 5 . Si $p(0) = 0$, alors p est le vecteur nul de V .
 - ☐ Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ un vecteur de l'espace vectoriel V des suites réelles. S'il existe un entier n tel que $x_n = 0$, alors $(x_n)_{n \geq 0}$ est le vecteur nul de V .