

Série 4

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *base, transformation linéaire, indépendance linéaire*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Définition Une application / transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire si

1. $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$;
2. $T(\lambda \vec{x}) = \lambda T(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 1 ((In)dépendance linéaire et span)

- a) Les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants ?
- b) Les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?
- c) Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2 (Span)

Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a) Donner une interprétation géométrique de $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.
- b) Est-ce que $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans le $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?

Exercice 3 (Span)

Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tous h et $k \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} h \\ h \\ k \end{pmatrix}$ appartient à $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Exercice 4 (Solution paramétrée)

Pour chacun des systèmes suivants :

- i) Écrire la matrice augmentée.
 - ii) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.
 - iii) Identifier les variables de bases (principales) et les variables libres (secondaires), et écrire la solution générale.
- a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$

Exercice 5 (Preuve)

Prouver l'affirmation suivante :

Soit l'ensemble $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $p < n$ alors l'ensemble ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6 (Solutions paramétrées)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Exercice 7 (Solution)

Déterminer les valeurs du nombre réel a pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + ay + 4z = -4 \\ -x + y + az = 2 \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

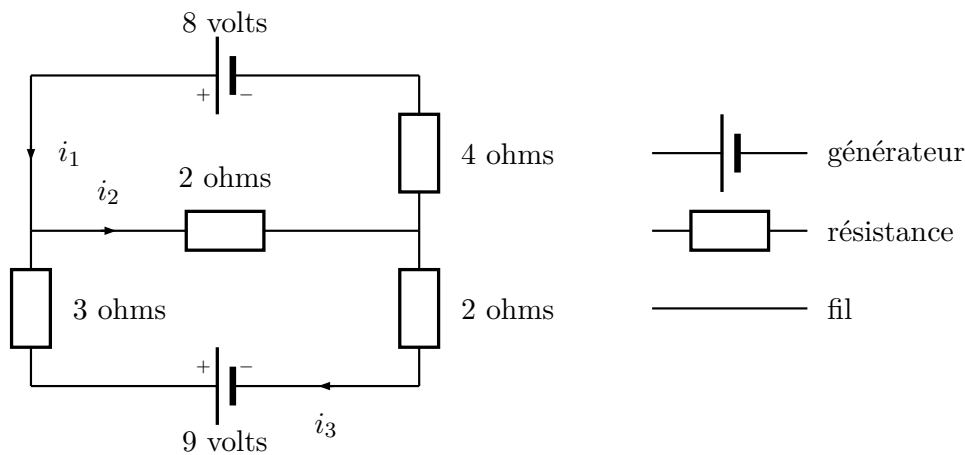
Exercice 8 (Kirchhoff)

Les deux lois de Kirchhoff

1. À chaque nœud (embranchement) d'un circuit électrique, la somme des courants (intensités) qui entrent dans le nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.
2. La somme des tensions (différences de potentiels) le long de tout circuit fermé est nulle (l'augmentation du potentiel est comptée avec $+$ et la diminution avec $-$).

On rappelle que la chute de potentiel U dans une résistance R traversée par un courant d'intensité I est donnée par la loi d'Ohm $U = RI$.

Déterminer les intensités i_1, i_2, i_3 dans le circuit suivant.



Exercice 9 (Transformation linéaire)

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{c) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (Transformation linéaire)

Décrire géométriquement la transformation linéaire suivante : $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}.$$

Indication : Calculer les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T .

Exercice 11 (QCM : span)

Soit $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ avec

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$.
- ☐ Le $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une droite.
- ☐ Le $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est un plan.
- ☐ Le $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ne contient que $\vec{0}$.

Exercice 12 (QCM : solutions)

- a) Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrices augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array} \right)$$

- ☐ $h = 5$,
- ☐ $h = 5/2$,
- ☐ $h \neq 5/2$,
- ☐ $h = -5/2$.

b) Même question pour la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array} \right).$$

- ☐ $h = 2$,
- ☐ $h = -2$,
- ☐ $h \neq 2$,
- ☐ $h \neq -2$.

Exercice 13 (Vrai-faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine. ☐ ☐
- b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant. ☐ ☐
- c) Une équation homogène est toujours compatible. ☐ ☐
- d) Si $\vec{x}$ est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de $\vec{x}$ est nulle. ☐ ☐

Exercice 14 (Vrai-faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Les vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont linéairement dépendants pour tout choix de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. ☐ ☐
- b) Un ensemble formé d'un seul vecteur est linéairement indépendant. ☐ ☐
- c) Une matrice 6×4 doit posséder quatre pivots pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes. ☐ ☐
- d) Les colonnes d'une matrice 3×4 engendrent $\mathbb{R}^3$. ☐ ☐