Série 2

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *solutions, Gauss-Jordan, formes échelonnées, formes écheonnées-réduites*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Systèmes linéaires)

i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$

Exercice 2 (Matrice et solutions)

a) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.

b) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.

c) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Matrices échelonnées, échelonnées-réduites)

a) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.
b) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Matrices échelonnées-réduites)

Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres a, b, c, d et e pour lesquelles la matrice suivante est sous forme échelonnée-réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (Opérations élémentaires)

Les opérations suivantes sont-elles valides ?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 - L_2 \\ L_1 - L_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (Algorithme de Gauss-Jordan)

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour que le système $\left\{ \begin{aligned} x + 2y &= a \\ 4x + by &= 12 \end{aligned} \right.$

a) ne possède pas de solution,
b) possède une solution unique,
c) possède une infinité de solutions.

Exercice 7 (Systèmes homogènes)

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 8 (Systèmes linéaires)

Pour chacun des systèmes suivants

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z+3w & = & 13 \\ x-2y+z+w & = & 8 \\ 3x+y+z-w & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+z-2w & = & 1 \\ 3x-2y+z-6w & = & -2 \\ x+y-z-w & = & -1 \\ 6x+z-9w & = & -2 \\ 5x-y+2z-8w & = & 3 \end{array}\right.$

a) Écrire la matrice augmentée correspondante (pour l'ordre des inconnues x, y, z, w).
b) Mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
c) Déterminer la solution générale du système.

Exercice 9 (Combinaisons linéaires)

Considérons les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Est-il possible d'écrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$?
b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Exercice 10 (Système compatible)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ n'est pas compatible pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$. Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{b}$ pour lesquels $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible.

Exercice 11 (Système incompatible)

Montrer que le système d'équations linéaires suivant n'a pas de solution :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x + & y + & z & & = 1 \\ x - & 2y - & z - & u & = 3 \\ x + & 3y + & 2z + & u & = 5 \\ 3x + & 4y + & 3z + & 3u & = 7 \end{array}\right.$$

Exercice 12 (QCM)

Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rl} x - 2y - 3z - 3u = & -1 \\ 2x + 4y + 2z + 2u = & 6 \\ -9x + 4y - 3z + 5u = & 3 \\ 3x - 8y + 5z - 3u = & -13 \end{array}\right.$$

- ☐ possède une solution unique
- ☐ a une droite comme solution
- ☐ a un plan comme solution
- ☐ ne possède aucune solution

Exercice 13 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée ne changent jamais l'ensemble des solutions du système linéaire associé.	☐	☐
b) Un système incompatible a plus d'une solution.	☐	☐

Exercice 14 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0\ 0\ 0\ 0\ 5]$ comme ligne, alors le système est incompatible.	☐	☐
b) Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.	☐	☐
c) À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.	☐	☐
d) Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.	☐	☐