Série 12

Cette série suit le chapitre 6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *orthogonalité, QR et moindres carrés*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Produit scalaire)

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs à l'origine.

Indication utiliser la loi des cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ où a, b, c sont les longueurs des cotés d'un triangle et γ est l'angle opposé au côté de longueur c.

Exercice 2 (preuve)

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q\}$ une base orthogonale de W, et $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ une base orthogonale de $W^\perp$.

Montrer que $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q,\, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ est une famille orthogonale et prouver la relation

$$\mathrm{dim} W + \mathrm{dim} W^\perp = n.$$

En conclure que $W = (W^\perp)^\perp$.

Indication : On pourra utiliser la projection orthogonale, pour décomposer tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme somme d'un élément de W et d'un élément de $W^\perp$.

Exercice 3 (Produit scalaire)

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Montrer que la formule $(\vec{u}|\vec{v}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \vec{u}^T A^T A \vec{v}$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 (Orthogonalité)

Soient $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont orthogonaux.
b) Calculer la projection orthogonale $\text{proj}_W(\vec{v})$ de $\vec{v}$ sur $W = \text{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.
c) Donner la décomposition $\vec{v} = \text{proj}_W(\vec{v}) + \vec{z}$, où $\vec{z} \in W^\perp$.
d) Donner la matrice de l'application linéaire $\vec{v} \mapsto \text{proj}_W(\vec{v})$ (relativement à la base canonique)

Même question pour $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (Trouver la matrice associée à la projection peut-être long !)

Même question pour $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Trouver la matrice associée à la projection peut-être long !)

Exercice 5 (Gram-Schmidt)

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour trouver des bases orthogonales des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivants.

a) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Exercice 6 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soit $\|.\|$ la norme euclidienne. Alors pour un vecteur $\vec{v}$, $\|c\vec{v}\| = c\,\|\vec{v}\|$ quel que soit le scalaire c. ☐ ☐

b) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 .$$

☐ ☐

c) Si un vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à tous les vecteurs sauf un d'une base d'un sous-espace W, alors $\vec{v}$ appartient à $W^\perp$. ☐ ☐

d) Soit W un sous-ensemble d'un espace vectoriel V. Si la dimension de l'espace $W^\perp$ est égale à 1, alors on peut trouver une base de V formée par des vecteurs de W. ☐ ☐

Exercice 7 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est appelée une base orthonormale. ☐ ☐

b) Un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre. ☐ ☐

c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général. ☐ ☐

d) Si $\vec{x}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel W, alors $\vec{x} - \vec{p}_W(\vec{x})$ n'est pas nul. ☐ ☐

Exercice 8 (QR)

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (QR et moindres carrés)

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$

1. en utilisant l'équation normale lorsque

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

2. en utilisant la méthode QR lorsque

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 (Matrices orthogonales)

a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale. (Que peut-on déduire sur les lignes de Q ?)

b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.

c) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.

d) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11 (Gram-Schmidt)

Soit $V = C\,[-1, 1] = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}; f \text{ continue}\}$. On munit V du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel de V suivant :

$$\mathbb{P}_2 = \text{span}\left\{1, t, t^2\right\}.$$

Exercice 12 (Noyau, rang et transposée)

Soit $A \in M_{m\times n}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A)$.

a) En déduire que les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si $A^T A$ est inversible.

b) En déduire que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T A)$.

Exercice 13 (Valeurs propres)

(a) Montrer que la matrice de rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un réel quelconque, est orthogonale. Calculer $\det R$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

(b) Montrer que la matrice de réflexion

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est orthogonale. Calculer $\det U$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

(c) Montrer que toute matrice $n \times n$ de la forme $Q = I_n - 2\vec{u}\,\vec{u}^T$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire (de longueur 1) de $\mathbb{R}^n$, est orthogonale. Ces matrices sont appelées matrices de réflexion élémentaires. A l'aide d'un raisonnement géométrique, déterminer les valeurs propres et les espaces propres correspondants.

Exercice 14 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\hat{\vec{y}}$ la projection orthogonale de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W. Alors $\hat{\vec{y}}$ dépend du choix de la base de W.

c) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tel que $W = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Si $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\vec{z} \perp \vec{w}_1$ et $\vec{z} \perp \vec{w}_2$, alors $\vec{z} \in W^\perp$.

d) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\vec{p}_W(\vec{y}) = \vec{y}$.

Exercice 15 (Produit scalaire et inégalités)

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|$ la norme usuelle définie à partir du produit scalaire usuel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (aussi appelée norme euclidienne) :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

Prouver les propriétés suivantes :

a) $\|\vec{v}\| \geq 0$

b) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

c) $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$

d) $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{u}\|$ (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*).

e) $\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$ (*Inégalité du triangle*)

Indication : pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, poser $\|\vec{u} + t\vec{v}\|^2$ et étudier $P(t_0)$ avec $t_0 = -\dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$.