

Série 9 (Corrigé)

Exercice 1 (Base de ker)

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de $\text{Ker}C$.
2. On note par T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(\vec{x}) = C\vec{x}$.
L'application T est-elle injective ? T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Sol.: L'espace nul ou noyau de C est la solution générale de l'équation $C\vec{x} = \vec{0}$. On doit résoudre cette équation pour trouver une base de $\text{Ker}C$. On échelonne puis on réduit C :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_4 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_2 - \frac{5}{2}l_1 \\ l_3 - \frac{3}{2}l_1 \\ l_4 - 4l_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} . \\ . \\ l_3 + l_2 \\ . \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} . \\ . \\ . \\ l_4 + 5l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On réduit la forme échelonnée précédente :

$$C \sim \begin{matrix} . \\ l_2 - 2l_3 \\ . \\ . \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} . \\ -\frac{2}{3}l_2 \\ . \\ . \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_1 - l_2 \\ . \\ . \\ . \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme échelonnée réduite de C est donc $C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On écrit le système $C'\vec{x} = \vec{0}$ sous la forme classique, pouvant à présent exprimer chaque inconnue principale en fonction des inconnues secondaires :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_5 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{26}{3}x_5 = 0 \\ x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{3}x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 4x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

La forme vectorielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la solution générale du système $C\vec{x} = \vec{0}$:

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le noyau de C est engendré par les vecteurs obtenus ci-dessus, que l'on choisit par exemple de multiplier par 3 pour éviter des fractions :

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 26 \\ 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. L'application T n'est pas surjective puisque l'espace des colonnes n'engendre pas $\mathbb{R}^4$ et elle n'est pas injective puisque le vecteur nul n'est pas la seule solution de $C\vec{x} = \vec{0}$.

Exercice 2 (Changement de bases)

Soient $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$ avec

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Donner la matrice $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ de changement de base (matrice de passage) de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.
- Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

- c) Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_{\mathcal{C}}$.
- d) À présent, si $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$.

Sol.:

- a) $[P]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ dans la base $\mathcal{B}$, i.e.

$$[P]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = ([\vec{c}_1]_{\mathcal{B}} \quad [\vec{c}_2]_{\mathcal{B}}).$$

Il faut donc résoudre deux systèmes linéaires afin de trouver $[\vec{c}_i]_{\mathcal{B}}$, $i = 1, 2$:

$$\vec{c}_i = x_{1i}\vec{b}_1 + x_{2i}\vec{b}_2 = (\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2) \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ est la solution de

$$(\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = (\vec{c}_1 \quad \vec{c}_2).$$

Si on désigne par $\mathcal{E}$ la base canonique, cela peut aussi être interprété comme

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} \Rightarrow P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}.$$

Pour résoudre ce système linéaire, on échelonne et on réduit la matrice $(\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)$ augmentée avec les vecteurs $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$:

$$(\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 | \vec{c}_1 \quad \vec{c}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Ainsi, la matrice de passage cherchée est $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

- b) On a $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1}$, d'où la matrice cherchée est $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

c) $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

d) $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 3 (Image et noyau)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication** : quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices ?)
- Calculer le rang de A et $\dim \text{Ker} A$.
- Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\text{Im} A$, $\text{Ker} A$ et $\text{Ker} A^T$, ainsi que du sous-espace $\text{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A .

Sol.:

- On constate que la forme échelonnée réduite des deux matrices est la même, elles sont donc équivalentes.
- En analysant la matrice B on remarque alors que :
Il y a deux colonnes indépendantes ce qui donne $\text{rang} A = 2$ (le rang est le nombre de colonnes-pivot) et une base de $\text{Im} A$ peut être formée par les deux premières colonnes de A qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée. Par le Théorème du rang on trouve $\dim \text{Ker} A = 4 - \text{rang} A = 2$.
- Trouvons les bases.

Base de $\text{Ker}(A)$: L'équation $A\vec{x} = 0$ est équivalente à $B\vec{x} = 0$; une base de $\text{Ker} A$ est donnée par exemple par : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et donc $\dim \text{Ker} A = 2$, ce qui confirme

le calcul effectué ci-dessus.

Base de $\text{Lgn}(A)$: Une base du sous-espace engendré par les lignes de A est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée B :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

Base de $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$: Enfin $\text{Im} A$ coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A^T . Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de A^T est de dimension $3 - 2 = 1$. On trouve que $\text{Ker} A^T$ est engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Applications linéaires)

- Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

- Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques E de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit $T: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(C) = X \cdot C$, où X est la matrice de taille 2×2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

$$\text{On cherche } B = \begin{pmatrix} [T(B_1)]_{\mathcal{B}} & [T(B_2)]_{\mathcal{B}} & [T(B_3)]_{\mathcal{B}} & [T(B_4)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}.$$

Sol.:

1. La matrice de l'application linéaire T par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice B , on commence par calculer les images par T des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs image dans la base $\mathcal{C}$ en résolvant les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right).$$

Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de l'application linéaire T par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice B , on commence par calculer les images par T des matrices de la base $\mathcal{B}$:

$$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad T \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées des deux premiers vecteurs image dans la base $\mathcal{C}$ (les deux derniers sont les vecteurs nuls quelle que soit la base considérée) en résolvant les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 5/2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1/2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array} \right).$$

Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 9/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (Preuve)

Prouver le théorème suivant. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors toute famille d'éléments de V de plus de n éléments est une famille linéairement dépendante.

Sol.:

Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ avec $p > n$ une famille de vecteurs de V . On sait que l'application coordonnées $[\cdot]_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme et donc préserve les relations de dépendances et d'indépendances linéaire. Ainsi $\{[v_1]_B, \dots, [v_p]_B\}$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, possédant la même relation de dépendance que $\{v_1, \dots, v_p\}$.

Grâce au chapitre 1, on sait que $\{[v_1]_B, \dots, [v_p]_B\}$ est une famille liée dans $\mathbb{R}^n$ car $p > n$. Ainsi il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des réels non tous nuls, tels que

$$\alpha_1[v_1]_B + \dots + \alpha_p[v_p]_B = \vec{0}.$$

Or $[\cdot]_B$ est linéaire, donc on obtient

$$[\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p]_B = \vec{0}.$$

où $\vec{0}$ nous donne les coefficients de $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base B . Ainsi,

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0b_1 + 0b_2 + \dots + 0b_n = 0_V$$

Ainsi $\{v_1, \dots, v_p\}$ n'est pas libre car 0_V s'exprime comme combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_p$ avec des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ non tous nuls.

Exercice 6 (Rang)

- Soit A une matrice 5×6 . Si $\dim \text{Ker } A = 3$, quel est le rang de A ?
- Soit A une matrice 7×3 . Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\text{Ker } A$? Même question si A est une matrice 3×7 .
- Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\text{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.
- Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = I_3$ (l'application identité). Quelle est la dimension de $\text{Ker } T$?

Sol.:

- On considère l'application linéaire associée de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^5$. Le théorème du rang donne

$$\text{rang}(A) + \dim \text{Ker } A = 6 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3.$$

- Si A est de taille 7×3 , alors $\text{rang}(A) + \dim \text{Ker } A = 3$. Le rang maximum est 3 et la dimension minimum du noyau est 0.

Si A est de taille 3×7 , le rang maximum est 3. Comme $\text{rang}(A) + \dim \text{Ker } A = 7$, la dimension minimum du noyau est 4.

- A^T est inversible $\Leftrightarrow A$ est inversible $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$.

- On a

$$3 = \text{rang}(I_3) = \text{rang}(T \circ T \circ T).$$

Ainsi, $\text{Ker}(T \circ T \circ T) = \{\vec{0}\}$. Comme

$$\vec{v} \in \text{Ker } T \Rightarrow \vec{v} \in \text{Ker}(T \circ T \circ T),$$

on obtient $\dim \text{Ker } T = 0$.

Exercice 7 (Changements de bases)

Soit $\vec{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
- b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
- c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Sol.: Deux versions : une sans utiliser la théorie sur le changement de base, et une avec.

Sans utiliser la théorie sur le changement de base

- a) On note $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs de la base canonique E de $\mathbb{R}^3$. Par définition, la matrice canonique de l'application T est

$$([T(\vec{e}_1)]_E \quad [T(\vec{e}_2)]_E \quad [T(\vec{e}_3)]_E).$$

On cherche

$$M = ([T(\vec{e}_1)]_B \quad [T(\vec{e}_2)]_B \quad [T(\vec{e}_3)]_B).$$

On va donc chercher les vecteurs coordonnées de $T(\vec{e}_1)$, $T(\vec{e}_2)$ et $T(\vec{e}_3)$ par rapport à la base B . On note $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ les vecteurs de la base B . Commençons par $T(\vec{e}_1)$. On

cherche l'unique vecteur $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ tel que $T(\vec{e}_1) = r_1\vec{b}_1 + r_2\vec{b}_2 + r_3\vec{b}_3$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = [T(\vec{e}_1)]_B. \quad (1)$$

De façon similaire, on obtient

$$[T(\vec{e}_2)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [T(\vec{e}_3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) On procède de manière identique pour expliciter

$$M = ([T(\vec{b}_1)]_E \quad [T(\vec{b}_2)]_E \quad [T(\vec{b}_3)]_E) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici les 3 systèmes à résoudre sont très simples car ils font intervenir la matrice identité (matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base canonique E).

c) La matrice M recherchée est ici donnée par

$$M = \begin{pmatrix} [T(\vec{b}_1)]_B & [T(\vec{b}_2)]_B & [T(\vec{b}_3)]_B \end{pmatrix}.$$

Les 3 systèmes à résoudre font intervenir la même matrice qu'en (1). On obtient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la théorie sur le changement de base

a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation T . On obtient

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique E . Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base E à la base B , notée P_{BE} (telle que $[\vec{x}]_B = P_{BE}[\vec{x}]_E$). On sait, du cours, que cette matrice est l'inverse de la matrice de passage de la base B à la base E , notée P_{EB} . Cette dernière est donnée par

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. ses colonnes sont les vecteurs de la base B , exprimés dans la base E . Pour calculer son inverse, on peut utiliser la méthode vue en cours (avec l'identité à droite), ou calculer directement son inverse en résolvant $P_{EB}P_{EB}^{-1} = I_3$, où l'on pose

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice P_{EB} contient beaucoup de zéros, il sera plus simple de résoudre le système d'équations obtenu que d'utiliser la méthode vue en cours. On obtient facilement que l'inverse est

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{BE}.$$

On applique alors P_{BE} aux vecteurs obtenus précédemment (qui sont exprimés dans la base E). La matrice M est

$$M = \begin{pmatrix} [P_{BE}\vec{T}(\vec{e}_1)] & [P_{BE}\vec{T}(\vec{e}_2)] & [P_{BE}\vec{T}(\vec{e}_3)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation T .

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont exprimés dans la base canonique E . La matrice M est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Variante en utilisant la définition de la matrice associée à T . On sait que $T(\vec{b}_i) = A\vec{b}_i$ avec $A = ([T(\vec{e}_1)]_E \quad [T(\vec{e}_2)]_E \quad [T(\vec{e}_3)]_E)$. Ainsi on peut trouver les colonnes de notre matrice cherchée en résolvant

$$([T(\vec{e}_1)]_E \quad [T(\vec{e}_2)]_E \quad [T(\vec{e}_3)]_E)([\vec{b}_1]_E \quad [\vec{b}_2]_E \quad [\vec{b}_3]_E) = (T(\vec{b}_1) \quad T(\vec{b}_2) \quad T(\vec{b}_3))$$

- c) On applique P_{BE} aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice

$$M = \begin{pmatrix} [P_{BE}\vec{T}(\vec{b}_1)] & [P_{BE}\vec{T}(\vec{b}_2)] & [P_{BE}\vec{T}(\vec{b}_3)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (Rang)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Donner une base pour le noyau, l'image, et l'espace engendré par les lignes de A , puis vérifier que l'affirmation du théorème du rang est bien vérifiée.

Sol.: Une forme échelonnée de A est

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit donc des pivots dans les colonnes 1 et 2, ce qui implique que $\text{Im } A (= \text{Im } A)$ est engendré par sa première et sa deuxième colonne, donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

est une base de $\text{Im } A$. On obtient le noyau en remarquant que x_3 et x_4 sont libres, et que les autres sont données par $x_1 = x_3 - 5x_4$, $2x_2 = 5x_3 - 6x_4$. Une base de $\text{Ker } A$ est donc donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalement, puisque $\text{Lgn } A = \text{Lgn } \tilde{A}$, la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

forme une base de $\text{Lgn } A$.

L'affirmation du théorème du rang est vérifiée, puisque $\dim(\text{Im } A) = 2 = \dim(\text{Lgn } A)$, et que

$$\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = 2 + 2 = 4 \quad (= \#(\text{colonnes de } A))$$

Exercice 9 (Application linéaire)

On considère l'application linéaire $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

- Trouver la matrice $[T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}$ de l'application T relativement à la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{P}_3$ (départ) et $\mathcal{E}$ de $\mathbb{P}_2$ (arrivée).
- Trouver la dimension et une base de $\text{Im } T$.
- Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).
- Trouver la dimension et une base de $\text{Ker } T$.
- Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).
- L'application T est-elle injective, surjective, ou bijective ?

Sol.: Par rapport aux bases canoniques $\mathcal{E} = (1, t, t^2, t^3)$ de $\mathbb{P}_3$ et $(1, t, t^2)$ de $\mathbb{P}_2$, la matrice associée à l'application linéaire T est donnée par

$$[T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'image de T est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$ de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Im}} = \{1 + t, 1 + t^2\}$ et le noyau de T est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \{1 - t, t^2 - t^3\}$. Le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T puisque $T(5 + 2t^2) = 7 + 5t + 2t^2$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Im}}$ sont

$$[7 + 5t + 2t^2]_{\mathcal{B}_{\text{Im}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

puisque

$$7 + 5t + 2t^2 = 5(1 + t) + 2(1 + t^2) \quad (= 5T(1) + 2T(t^2) = T(5 + 2t^2)).$$

Le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T puisque $T(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3) = 0$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Ker}}$ sont

$$[2 - 2t - 5t^2 + 5t^3]_{\mathcal{B}_{\text{Ker}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

puisque

$$2 - 2t - 5t^2 + 5t^3 = 2(1 - t) - 5(t^2 - t^3).$$

L'application T n'est pas injective car son noyau $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$. Elle n'est pas surjective car son image $\text{Im}(T) \neq \mathbb{P}_2$.

Exercice 10 (Changements de bases)

Soient $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ deux bases d'un espace vectoriel V . Supposons que

$$b_1 = 6c_1 - 2c_2 \quad \text{et} \quad b_2 = 9c_1 - 4c_2.$$

- (a) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [\text{Id}_V]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.
- (b) Trouver $[x]_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a)

Soient $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ et $\mathcal{D} = (\vec{d}_1, \vec{d}_2)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (c) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{A}}$ de la base $\mathcal{A}$ vers la base $\mathcal{D}$.
- (d) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{D}}$ de la base $\mathcal{D}$ vers la base $\mathcal{A}$.

Sol.:

- (a) La matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de base de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- (b) L'équation $x = -3b_1 + 2b_2$ implique que $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour trouver $[x]_{\mathcal{C}}$, il suffit d'utiliser la matrice de changement de base :

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Nous allons utiliser la méthode du court qui consiste à trouver $P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{A}}$ à partir des matrices $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{A}}$ et $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{D}}$. Nous avons

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{A}} &= P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{A}} = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{D}}^{-1} P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On aurait aussi pu réduire la matrice augmentée suivante

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \vec{d}_1 & \vec{d}_2 & \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{array} \right) = (P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{D}} | P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{A}}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 7 & -3 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{array} \right) \sim (I_2 | P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{A}}).$$

(d) Pour trouver $P_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{D}} = (Id)_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$, il faut se rappeler que

$$P_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{D}} = P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (QCM)

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

- ☐ $\text{Ker} A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0.
- ☐ $\text{Ker} A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.
- ☐ $\text{Ker} A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.
- ☐ $\text{Ker} A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

b) On considère les polynômes $p(t) = (1-t)(1+t) = 1-t^2$ et $q(t) = (1+t)(1+t) = 1+2t+t^2$ de $\mathbb{P}_2$.

- ☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.
- ☐ Les polynômes p et q forment une base de $\mathbb{P}_2$.
- ☐ Le polynôme $q - p$ est le polynôme nul.
- ☐ $(1+t)p - (1-t)q$ est une combinaison linéaire de p et q .

c) Soit W l'hyperplan dans $\mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$. On

considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- ☐ On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

- ☐ On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

d) Soit V un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de V .

- ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V , alors $\dim V = k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V , alors $\dim V \geq k$.

e) Soit $\text{Tr}: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie par

$$\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = a + d.$$

- ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2 \times 2}$ de dimension 1.
- ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2 \times 2}$ de dimension 2.
- ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2 \times 2}$ de dimension 3.
- ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2 \times 2}$ de dimension 4.

f) Soit $\text{Tr}: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de Tr :

- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sol.:

a) ☐ $\text{Ker} A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Ainsi $\text{Ker} A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, pas de $\mathbb{R}^4$. Pour trouver sa dimension il faut échelonner la matrice A . Comme toutes les lignes sont proportionnelles le noyau de A est la solution de l'équation $-x + 3y = 0$, une droite dans le plan.

b) ☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

En effet, bien que $(1+t)p + (1-t)q = 0$, ce n'est pas une combinaison **linéaire**, car dans une combinaison linéaire seuls des coefficients réels sont permis, pas des coefficients polynomiaux. Malgré cela ils ne sont pas assez nombreux pour former une base de $\mathbb{P}_2$. Enfin, le polynôme $q - p$ s'annule en 0, mais ce n'est pas le polynôme nul, c'est $2t + 2t^2$.

c) ☐ On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont proportionnels, ils sont donc linéairement dépendants et ne peuvent être complétés en une base. Par contre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont linéairement indépendants, ils peuvent donc être complétés en une base de W . Le sous-espace W est donné par une équation à six inconnues. Cinq d'entre elles sont des inconnues secondaires qui jouent le rôle de paramètres, la dimension de W est donc 5.

d) ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, on peut compléter cette famille en une base et cette base aura donc au moins k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au minimum ($\dim V \geq k$). Alors que, si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre V , on peut extraire une base de cette famille et cette base aura donc au plus k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au maximum ($\dim V \leq k$).

e) ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2 \times 2}$ de dimension 3.

Pour avoir $\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 0$, il faut que $a + d = 0$, autrement dit que $d = -a$. Ainsi le noyau de l'application Tr correspond au sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

qui est de dimension 3.

f) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Comme le noyau de Tr est de dimension 3, par la question f., il faut 3 matrices de ce sous-espace pour l'engendrer. De plus, les trois matrices ci-dessus sont linéairement indépendantes et appartiennent au noyau de Tr . Elles forment donc une base du noyau de Tr .

Exercice 12 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Le plan défini dans $\mathbb{R}^3$ par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. | ☐ | ☐ |
| b) $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$ si et seulement si l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective. | ☐ | ☐ |
| c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$. | ☐ | ☐ |
| d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. | ☐ | ☐ |

Sol.: Vrai : (c), (d). Faux : (a), (b).