Série 7 (Corrigé)

Exercice 1 (Preuve)

Montrer :

a) Si A est une matrice inversible, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

b) Si A et Q sont des matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $\det(QAQ^{-1}) = \det A$.

c) Si U est une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que $U^T U = I_n$, alors $\det U = \pm 1$.

d) Si A est une matrice carrée telle que $\det A^3 = 0$, alors A est non inversible.

Sol.:

a) On a $1 = \det I_n = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A$*. Ainsi,* $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

b) C'est une conséquence de a) (à noter qu'il n'est pas nécessaire que A soit inversible) :

$$\det\left(QAQ^{-1}\right) = \det Q \cdot \det A \cdot \det Q^{-1} = \det Q \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det Q} = \det A.$$

c) (De telles matrices U s'appellent des matrices orthogonales). On a $1 = \det I_n = \det\left(U^T U\right) = \det U^T \cdot \det U = (\det U)^2$*. Ainsi,* $(\det U)^2 = 1$*, d'où* $\det U = \pm 1$.

d) On a $\det A^3 = (\det A)^3$*. Ainsi,* $(\det A)^3 = 0$ *ssi* $\det A = 0$*, ce qui équivaut au fait que la matrice A est non inversible.*

Exercice 2 (Déterminant de Vandermonde)

On considère des nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ et on construit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$. Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle inversible ?

Indication. Effectuer des opérations sur les lignes de la matrice en utilisant L_2 pour modifier L_3, puis L_1 pour modifier L_2. La même astuce sera utile dans la suite de l'exercice !

Trouver une formule pour le déterminant de la matrice de la matrice 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

Comment peut-on généraliser ce résultat aux matrices $n \times n$?

Sol.: *Pour calculer le déterminant de la matrice A on peut astucieusement effectuer les opérations élémentaires suivantes dans l'ordre indiqué : On soustrait a fois la 2ème ligne à la 3ème et ensuite a fois la première ligne à la deuxième :*

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

Nous avons développé le déterminant selon la première colonne. On peut maintenant mettre $(b-a)$ en évidence par linéarité du déterminant comme fonction de la première colonne et $(c-a)$ par linéarité du déterminant comme fonction de la troisième colonne :

$$detA = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Pour que la matrice A soit inversible il faut que le déterminant soit non nul, donc que les nombres a, b, c soient tous distincts.

Les opérations élémentaires $L_4 - aL_3$, puis $L_3 - aL_2$, puis $L_2 - aL_1$ ramènent le calcul à un déterminant de Vandermonde de taille 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{pmatrix}$$

Ainsi le déterminant vaut $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

$$\textit{En général, si } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}, \ \det A = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} (c_j - c_i)$$

Exercice 3 (Déterminant et opérations élémentaires)

Sachant que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Sol.:

- $t = 7$. *En effet, on a obtenu cette matrice à partir de la matrice originale en ajoutant la seconde ligne à la première ce qui ne change pas le déterminant.*
- $s = 14$. *En effet, on a obtenu cette matrice à partir de la matrice originale en multipliant la deuxième ligne par* 2*, ce qui multiplie également le déterminant par* 2*, puis en ajoutant la première ligne à la seconde, ce qui ne change pas la valeur du déterminant. ce qui ne change pas le déterminant.*

Exercice 4 (Déterminant)

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: *On échelonne la matrice afin de rendre les calculs plus simples. On obtient* $\det(A) = 16$. *En effet en utilisant* L_1 *pour échelonner* L_2 *et* L_3 *et* L_3 *pour* L_4 *et* L_5 *(ça fera apparaître le plus rapidement possible des 0)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \overset{\textit{opérations de type 3}}{\sim} \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Puis en utilisant L_2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\textit{opérations de type 3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_5 \leftarrow L_5 - L4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En permutant L_2 *et* L_3 *on obtient une matrice triangulaire supérieure, que l'on appelle* A'

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $det(A)$ *sera impacté par la permutation de la manière suivante*

$$det(A) = (-1)det(A') = (-1)(1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = (-1)(-16) = 16$$

Exercice 5 (Preuve)

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Sol.: *Deux lignes de A sont identiques ssi deux colonnes de A^T sont identiques. Si deux colonnes de A^T sont les même, alors les colonnes sont linéairement dépendantes, ainsi A^T est non inversible, c-à-d* $\det\left(A^T\right) = \det(A) = 0$. *On peut donc conclure dans tous les cas* $\det(A) = 0$.

Méthode 2 : Échanger deux lignes (ou colonnes) de A multiplie le déterminant de A par -1. En échangeant deux lignes identiques (ou colonnes) de A, la matrice A ne change pas. On a donc : $\det(A) = -\det(A)$. *Ainsi* $\det(A) = 0$.

Exercice 6 (Déterminants)

Calculer les déterminants suivants en utilisant le développement selon une ligne ou une colonne, et la méthode de Gauss d'échelonnage :

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Sol.:

a) Par un développement selon la première ligne, on calcule deux déterminants 2×2 et trouve $a = 4$.

b) Par un développement selon la troisième ligne, puis la première, on trouve $b = 10$.

c) En fait, la matrice étant triangulaire, nous savons que le déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale. On trouve $c = 72$

d) On applique ici la méthode de Gauss : $d = 3$.

e) La réduction sous forme échelonnée de cette matrice fait surgir une ligne sans pivot. On en conclut que $e = 0$.

Exercice 7 (Calcul d'aire et volume)

a) Calculer le volume du parallélépipède dont un sommet se trouve à l'origine et les trois sommets adjacents se trouvent en $(1, 4, 0)$, $(-2, -5, 2)$ et $(-1, 2, -1)$.

b) Calculer l'aire du parallélogramme S dont les sommets sont donnés par les points $(-3,-1)$, $(-2,-3)$, $(0,2)$ et $(1,0)$.

Sol.: *Le parallélépipède décrit est supporté par les vecteurs* $\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$. *Ainsi son volume est la valeur absolue du déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & -5 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

On trouve 15.

L'aire du parallélogramme S *est la même si on lui applique une translation. On observe que* $S=\vec{p}+S'$, *où* S' *est le parallélogramme dont les sommets sont* $(-4,-1)$, $(-3,-3)$, $(-1,2)$ *et* $(0,0)$, *et* $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. *Ainsi*

$$\{\textit{aire de } S\}=\{\textit{aire de } S'\}=|\det(A)|=9,$$

pour

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (Applications linéaires)

Déterminer si les applications linéaires associées aux matrices suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & 0 & 9\\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8\\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Sol.: *La réduction de Gauss-Jordan de la matrice* A *nous donne*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-3L_1}{\widetilde{L_2\leftarrow L_2-2L_1}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\widetilde{L_1\leftarrow L_1-L_2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- *Comme la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice* A *n'a pas un pivot par colonne, le système* $A\vec{x}=\vec{0}$ *possède une infinité de solutions et l'application linéaire n'est pas injective.*
- *Comme la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice* A *n'a pas un pivot par ligne, le système* $A\vec{x}=\vec{b}$ *n'est pas consistant pour tout* $\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ *et l'application linéaire n'est pas surjective.*
- *Comme l'application linéaire n'est ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.*

De la même manière nous avons

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\widetilde{L_2 \leftarrow L_2} - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\widetilde{L_1 \leftarrow L_1} - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Comme il n'y a pas un pivot par colonne, l'application linéaire n'est pas injective.*
- *Comme il n'y a pas un pivot par ligne, l'application linéaire n'est pas surjective.*
- *Comme l'application linéaire n'est ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.*

Les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice C nous donnent

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\widetilde{L_2 \leftarrow L_2} - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{L_2 \leftrightarrow \tfrac{1}{4}} L_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}{\widetilde{L_3 \leftarrow L_3} - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Comme il n'y a pas un pivot par colonne, l'application linéaire n'est pas injective.*
- *Comme il y a un pivot par ligne, l'application linéaire est surjective.*
- *Comme l'application linéaire n'est pas injective, elle n'est pas bijective.*

Exercice 9 (Solution générale)

Écrire les solutions des systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ suivants sous la forme $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$, où $\vec{p}$ est une solution particulière du système, et $\vec{v}$ est la solution générale du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Sol.:

a) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution générale :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système est incompatible. Pas de solution !

Exercice 10 (Espace vectoriel)

a) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $a_0+a_1t+...+a_nt^n$, où $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
b) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel.
c) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 2

$$\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \ a_2 \neq 0\},$$

n'est pas un espace vectoriel.
d) Montrer que l'ensemble des suites $(..., y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...)$ avec $y_k \in \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication par un scalaire (comme définies en cours) est un espace vectoriel.
e) Montrer que l'espace vectoriel défini en a) et b) est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication par un scalaire (comme définies en cours).
f) Montrer que $C(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel (muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, comme définies en cours).
g) Montrer que $C^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f$ est dérivable de dérivée continue$\}$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ (muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, comme définies en cours).

Sol.:

Un espace vectoriel réel est un ensemble non vide V d'objets (appelés vecteurs) sur lesquels sont définies deux opérations : l'addition

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

et la multiplication par un scalaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (a, u) & \mapsto & au. \end{array}$$

Ces deux opérations doivent satisfaire les axiomes suivants pour tout $u, v, w \in V$ et $c, d \in \mathbb{R}$.

1. $u+v=v+u$
2. $(u+v)+w=u+(v+w)$
3. *Il existe un élément zéro* 0 *dans* V *tel que* $u+0=u$ *pour tout* u
4. *Il existe un élément* $-u\in V$ *tel que* $u+(-u)=0$
5. $c\,(u+v)=cu+cv$
6. $(c+d)\,u=cu+du$
7. $c\,(du)=(cd)\,u$
8. $1u=u$.

a) *On doit vérifier les 8 axiomes ci-dessus.*
Pour l'addition, on considère deux polynômes u *et* v *donnés par* $a_0+a_1t+...+a_nt^n$ *et* $b_0+b_1t+...+b_nt^n$. *Alors* $u+v=(a_0+a_1t+...+a_nt^n)+(b_0+b_1t+...+b_nt^n)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\,t+...+(a_n+b_n)\,t^n$ *ce qui est bien un polynôme de degré* $\leq n$.
L'élément zéro de l'axiome 3 est donné par le polynôme nul $u\equiv 0$ *(c-à-d* $u=0\ \forall x$*).*
Les autres propriétés s'obtiennent de la même manière par calcul direct.
Note : Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$, *(ceci pour avoir la propriété* $\text{degré}(ab)=\text{degré}(a)+\text{degré}(b)$*).*

b) *On doit de nouveau montrer que les 8 axiomes ci-dessus sont vérifiés.*
Pour l'addition, on considère deux polynômes u *et* v *donnés par* $a_0+a_1t+...$ *et* $b_0+b_1t+...$. *Alors* $u+v=(a_0+a_1t+...)+(b_0+b_1t+...)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\,t+...$ *qui est de la même forme que* u *et donc un polynôme à coefficients réels.*
L'élément zéro de l'axiome 3 est donné par le polynôme nul $u\equiv 0$. *Les autres propriétés s'obtiennent de la même manière par calcul direct.*

c) *Il suffit de montrer qu'on moins un des 8 axiomes ci-dessus n'est pas vérifié.*
L'élément zéro devrait être le polynôme nul $u\equiv 0$, *qui n'est pas un polynôme de degré 2, et donc n'appartient pas à l'espace, ce qui contredit l'axiome 3.*
Autre solutions. Montrons que l'addition n'est pas à valeurs dans V *(on dit que l'ensemble n'est pas stable par addition). On considère deux polynômes* u *et* v *de degrés* 2 *donnés par* $a_0+a_1t+a_2t^2$ *et* $b_0+b_1t+b_2t^2$. *L'ensemble de ces polynômes n'est pas stable par addition, comme le montre l'exemple suivant : le polynôme*

$$\left(t+t^2\right)+\left(t-t^2\right)=2t$$

est un polynôme de degré 1 et non 2 et par conséquent il n'appartient pas à l'espace.

d) *On doit à nouveau vérifier les 8 axiomes ci-dessus.*
Pour l'addition, on considère deux suites $u:=(...,y_{-1},y_0,y_1,...)$ *et* $v:=(...,z_{-1},z_0,z_1,...)$. *Alors* $u+v=(...,y_{-1},y_0,y_1,...)+(...,z_{-1},z_0,z_1,...)=(...,y_{-1}+z_{-1},y_0+z_0,y_1+z_1,...)$ *qui est une suite de la même forme que* u *et* v. *L'élément zéro est donné par la suite nulle* $v:=(...,0,0,0,...)$. *L'opposé de* u *est* $-u:=(...,-y_{-1},-y_0,-y_1,...)$. *Les autres axiomes s'obtiennent immédiatement avec la même technique.*

e) *Un sous-ensemble* H *d'un espace vectoriel* V *est un sous-espace vectoriel si les propriétés suivantes sont vérifiées*

   i) *Le vecteur nul de* V *est dans* H.

ii) H est stable pour la addition. C-à-d, pour tout u et v dans H, la somme $u+v$ est dans H.

iii) H est stable pour la multiplication par un scalaire. C-à-d pour tout $u \in H$ et $c \in \mathbb{R}$ le vecteur cu est dans H.

D'abord, l'espace des fonctions polynomiales est un sous-ensemble de l'espace des fonctions. Ensuite, on doit vérifier la propriété i), les autres propriétés ii) et iii) ayant déjà été vérifiées. L'élément zéro *de l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$, qui peut être vue comme le polynôme nul, qui appartient bien à l'espace des polynômes.*

f) On doit encore vérifier les 8 axiomes. Par le cours d'analyse, on sait que la somme de deux fonctions continues est continue, de même pour le produit d'une fonction continue par un scalaire. L'élément nul est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$ qui est bien continue, et les autres axiomes sont vérifiés de la même manière.

g) On doit encore vérifier les propriétés énoncées au e).

i) Le vecteur nul de $C(\mathbb{R})$ est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$, qui est différentiable et donc aussi dans $C^1(\mathbb{R})$.

ii) H est stable pour l'addition. On sait par le cours d'analyse que la somme de deux fonctions de $C^1(\mathbb{R})$ est encore dans $C^1(\mathbb{R})$.

iii) De même, H est stable pour la multiplication par un scalaire.

Exercice 11 (Sous-espaces vectoriels)

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_2^2\} \\
E_2 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p(0) = 1\} \\
E_3 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p'(t) = 0\} \\
E_4 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_1 = a_2\}
\end{aligned}$$

Sol.: *E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ car il n'est pas stable sous l'addition : si $p(t), q(t) \in E_1$ alors $p(t) = a_0 + a_1 + a_2 t^2$, $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ avec $a_0 = a_2^2$ et $b_0 = b_2^2$*

$$p(t) + q(t) = a_2^2 + a_1 t + a_2 t^2 + b_2^2 + b_1 t + b_2 t^2 = (a_2^2 + b_2^2) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2.$$

et comme $(a_2^2 + b_2^2) \neq (a_2 + b_2)^2$, $p(t) + q(t) \notin E_1$

E_2 n'est pas un sous-espace vecoriel de $\mathbb{P}_2$ car le polyôme nul n'est pas dans E_2, car il ne vérifie pas $p(0) = 1$. En effet les polynômes de E_2 sont de la forme $p(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2$ (comme cela quand $t = 0$ on a $p(0) = 1$).

Les deux derniers sont des sous-espaces vectoriels car ils vérifient les 3 axiomes.

Exercice 12 (V/F)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A, alors $\det B = \det A$.	☐	☐
b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det A = 0$.	☐	☐
c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A.	☐	☐
d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.	☐	☐

Sol.: *Vrai : b). Faux : a), c), d).*

Exercice 13 (QCM)

Considérer les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{v}_3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ lorsque

☐ $h = 2$ ☐ $h = 4$ ☐ $h = 1$ ☐ $h = -2$

Sol.: $h = 4$

Exercice 14 (QCM)

a. Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors

☐ $\det D = 30 \det A \det B$;
☐ $\det D = -60 \det A \det B$;
☐ $\det D = 90 \det A \det B$;
☐ $\det D = -120 \det A \det B$.

b. Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A, puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4} \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

Sol.:

a. ☐ $\det D = -120 \det A \det B$.
En effet le déterminant de la matrice C *est celui de* A *multiplié par* $5\cdot(-3)$ *par linéarité du déterminant comme fonction d'une ligne, puis d'une colonne. La déterminant de la matrice* $2B$ *vaut* $2^3 \det B$ *car on multiplie chacune des trois lignes par* 2*. Il faut ainsi multiplier* $\det A \cdot \det B$ *par* $-15 \cdot 8 = -120$.

b. ☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$.
En effet, le déterminant de la matrice C *est celui de* A *multiplié par* $4^3 \cdot (-1)$*, par linéarité du déterminant par rapport à chacune des lignes et puisque le déterminant change de signe lorsque l'on échange deux lignes. Le déterminant de* D *vaut* 4 *fois celui de* B*, par linéarité du déterminant comme fonction d'une colonne et parce que ajouter tant de fois une colonne à une autre ne change pas le déterminant. De plus,* *det*$(D^{-1}) = \det(D)^{-1}$ *et ainsi*

$$\det(C \cdot D^{-1}) = \det(C) \cdot \det(D^{-1}) = -4^3 \det(A) \cdot (4 \det(B))^{-1} = -16 \det(A) \cdot (\det(B))^{-1}$$