Série 6 (Corrigé)

Exercice 1 (Algorithme de Gauss-Jordan)

A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} w+2x-y &= 4 \\ -y+x &= 3 \\ w+3x-2y &= 7 \\ 2u+4v+w+7x &= 7 \end{cases}$$

Sol.: *En utilisant les variables dans l'ordre x, y, u, v, w, on peut écrire la matrice augmentée suivante (la dernière colonne correspond aux termes inhomogènes), que l'on échelonne :*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{L2\leftrightarrow L1}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{\substack{L2\to L2+(-2)\cdot L1 \\ L3\to L3+(-3)\cdot L1 \\ L4\to L4+(-7)\cdot L1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 1 & -14 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L3\to L3+(-1)\cdot L2 \\ L4\to L4+(-7)\cdot L2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{L4\to \frac{L4}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L4\leftrightarrow L3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L1\to L1+1\cdot L2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cela est équivalent au système :

$$\begin{cases} x+w=1 \\ y+w=-2 \\ u+2v-3w=0 \end{cases}$$

qui a comme solutions

$$x=1-w, y=-2-w, u=3w-2v,$$

où v et w sont des nombres réels quelconques (il y a donc une infinité de solutions). Pour mieux voir géométriquement ces solutions on aime les écrire sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un plan dans $\mathbb{R}^5$ *passant par le point* $(1, -2, 0, 0, 0)$. *Il y a deux* paramétres, *v et w, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On dit aussi qu'on a deux degrés de liberté.*

Si on avait fait le choix (probablement plus logique) d'ordonner les inconnues par ordre alphabétique, la matrice du système sera différente et sa forme échelonnée et réduite également :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et la forme paramétrique de la solution générale est alors, pour toutes valeurs réelles de v et y :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Injective, surjective)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

a) Montrer que si T est surjective, alors T est aussi injective.

b) Montrer que si T est injective, alors T est aussi surjective.

Sol.: *Soit A la matrice de taille $n \times n$ associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

a) Supposons que T est surjective. Par hypothèse, la matrice A possède une position pivot par ligne, c'est-à-dire n pivots. Par conséquent, il y a un pivot par colonne et T est aussi injective.

b) Supposons que T est injective. Par hypothèse, la matrice A possède un pivot par colonne, c'est-à-dire n pivots. Par conséquent, il y a un pivot par ligne et T est aussi surjective.

Exercice 3 (Inverse)

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possible, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A) Comme la colonne 1 est un multiple de la colonne 2, les colonnes sont linéairement dépendantes, et donc la matrice A n'est pas inversible.

B) Après plusieurs opérations de réduction sur les lignes, on obtient une forme échelonnée (non réduite)

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On trouve un pivot dans chaque ligne et la matrice est carrée, donc elle est inversible.

C) C est inversible car sous forme échelonnée (non réduite) avec pivot dans chaque ligne et la matrice est carrée.

D) D^T est sous forme échelonnée, avec un pivot dans chaque ligne et de taille carrée, donc D^T est inversible. Par conséquent, D est également inversible.

E) La matrice E n'est pas carrée, donc non inversible.

Exercice 4 (Inverse)

Calculer l'inverse des matrices ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (Matrices élémentaires)

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4.

a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.

b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.

c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.

d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a), b) et c).

Sol.:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

d) Pour inverser la transformation associée à A, on considère la même transformation qui permute les lignes 2 *et* 4*, ainsi* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Pour inverser la transformation associée à B, on considère la transformation qui soustrait cinq fois la ligne 1 à la ligne 3, ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Pour inverser la transformation associée à C, on considère la transformation qui divise la ligne 3 par 17*, ainsi* $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 6 (Matrices symétriques et anti-symétriques)

1. Trouver toutes les matrices symétriques de taille 2×2. Trouver toutes les matrices anti-symétriques de taille 2×2.
2. Soit A une matrice anti-symétrique de taille $n \times n$. Montrer que
   i) pour toute matrice B de taille $n \times n$ anti-symétrique, $A + B$ est anti-symétrique ;
   ii) si A est inversible, alors A^{-1} est anti-symétrique.

3. Soit M une matrice de taille $n \times n$. Montrer que M admet une décomposition sous la forme $M = S + A$, où S est une matrice symétrique et A une matrice anti-symétrique. Indication : on pourra considérer les matrices $M + M^T$ et $M - M^T$.
4. Calculer la décomposition en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique, des matrices M de taille 3×3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

1. *Les matrices symétriques S et anti-symétriques A sont données par*

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Observons que les coefficients diagonaux d'une matrice anti-symétrique sont toujours nuls. En effet, $a_{ii} = -a_{ii}$ implique que $a_{ii} = 0$.

2. *A et B sont deux matrices anti-symétriques donc leurs coefficients vérifient $a_{ji} = -a_{ij}$ et $b_{ji} = -b_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$. La matrice $C = A + B$ a pour coefficients $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et vérifie alors $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = -a_{ij} - b_{ij} = -c_{ij}$. Elle est donc anti-symétrique.*

   Si A est inversible, alors il existe A^{-1} vérifiant $A^{-1}A = I_n$. En transposant cette relation, on obtient $A^T(A^{-1})^T = I_n$. En utilisant l'anti-symétrie de A il vient alors $A(A^{-1})^T = -I_n$, et une multiplication à gauche par A^{-1} permet d'obtenir $A^{-1}A(A^{-1})^T = I_n(A^{-1})^T = (A^{-1})^T = -A^{-1}$, ce qui prouve que A^{-1} est anti-symétrique. De manière analogue, on peut montrer que l'inverse d'une matrice symétrique est encore symétrique.

3. *Posons $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. On vérifie que $S^T = S$, i.e. que S est une matrice symétrique, et que $A^T = -A$, i.e. que A est une matrice anti-symétrique. Par ailleurs, il est facile de vérifier que $S + A = M$. On vient donc d'exhiber la décomposition cherchée.*

4. *Pour la première matrice M, on obtient après calculs*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la seconde matrice, on s'aperçoit qu'elle est symétrique et donc trivialement $S = M$ et $A = 0_n$.

Exercice 7 (Produit matriciel : cas particulier)

Montrer qu'un produit de matrices $n \times n$ triangulaires inférieures est triangulaire inférieur.

Sol.: *Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $n \times n$ triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que $a_{ij} = b_{ij} = 0$ si $i < j$. Le coefficient ij du produit AB est donné par*

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} \, .$$

Comme A et B sont triangulaires inférieures, on a $b_{\ell j} = 0$ pour les $\ell = 1, \ldots, j-1$ et $a_{i\ell} = 0$ pour les $\ell = i+1, \ldots, n$. Donc, si l'on prend une paire d'indices ij pour laquelle $i < j$, on aura $a_{i\ell} b_{\ell j} = 0$ pour tout $\ell = 1, \ldots, n$, et donc $c_{ij} = 0$. Ceci montre que AB est triangulaire inférieure.

Pour un produit quelconque de matrices triangulaires inférieures $A_1, \ldots, A_n$, on procède par récurrence : on a montré ci-dessus que $A_1 A_2$ est triangulaire inférieure, donc $A_1 A_2 A_3 = (A_1 A_2) A_3$ l'est aussi, etc.

Exercice 8 (Produit matriciel : cas particulier)

Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer qu'en général $(A+B)(A-B) \neq 0$.

Est-ce qu'il y a des cas où l'égalité peut être vraie ?

Sol.:

On a

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2.$$

Par hypothèse les matrice A et B sont deux matrices nilpotentes avec un indice de nilpotence 2, donc

$$(A+B)(A-B) = BA - AB.$$

En général pour deux matrices quelconques $AB \neq BA$, et l'affirmation est fausse. Il n'y a que dans la situation où $AB = BA$, c'est à dire dans le cas où les deux matrices commutent, que l'affirmation est vraie. Par exemple avec les deux matrices ci-dessous on a $A^2 = B^2 = 0$ mais $AB \neq BA$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 (Inverse)

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les matrices suivantes sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs de λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Sol.: *Après plusieurs opérations élémentaires, on a transformé la paire* $(A \mid I_3)$ *en*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice à gauche est ligne-équivalente à la matrice identité I_3 *si et seulement si* $\lambda \neq 0$. *Donc* A *est inversible si et seulement si* $\lambda \neq 0$, *et dans ce cas son inverse est donné par*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2/\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

Pour la seconde, on procède de même, et on montre que B *est inversible si et seulement si* $\lambda \neq 1/2$, *et que dans ce cas*

$$B^{-1} = \frac{1}{5(1-2\lambda)} \begin{pmatrix} 5-7\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 3\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ -15 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 10 (Produit de matrices singulières et inversibles)

1. Soient A, B deux matrices $n \times n$. Prouver les affirmations suivates ou trouver un contre-exemple
   a) A ou B sigulière $\Rightarrow AB$ singulière
   b) AB inversible $\Rightarrow A$, B inversibles
2. Soient A, B deux matrices. Prouver ou trouver un contre-exemple

$$AB \text{ inversible} \Rightarrow A, B \text{ inversibles}$$

Sol.:

1. *a)* *On a* $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. *Supposons que* A *est singulière, on a* $\det(A) = 0$ *ainsi* $\det(AB) = 0$. *Donc* AB *est singulière car* $\det(AB) = 0$.

b) AB *est inversible, donc il existe une matrice* X $n \times n$ *telle que* $(AB)X = X(AB) = I_n$. *On obtient* $A(BX) = I_n$ *et* A *est inversible. De même* $(XA)B = I_n$ *implique* B *est inversible. Méthode avec les déterminants : on a* $\det(AB) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A)\det(B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ *et* $\det(B) \neq 0$.

2. *Pour la deuxième partie :* A *et* B *ne sont pas forcément carrées. Ainsi en prenant*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $AB = I_2$ *mais* A *et* B *sont sigulières car elles sont de tailles* 2×3 *et* 3×2 *respectivement.*

Exercice 11 (Inverse et équation matricielle)

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente* (lorsque $C^k = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.)
2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explicite cette fois !) de la matrice $I - C$.
4. Soit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \vec{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\vec{x} = (I - C)^{-1}\vec{b}$.

Sol.:

1. *On calcule* $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et alors* $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est la matrice nulle. On dit que C est* nilpotente *lorsqu'une puissance de C est nulle.*
2. *Il suffit de calculer le produit en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :*

   $$(I_3+C+C^2)(I_3-C) = I_3 \cdot I_3 + C \cdot I_3 + C^2 \cdot I_3 - I_3 \cdot C - C \cdot C - C^2 \cdot C = I_3 + C + C^2 - C - C^2 - C^3$$

   Par commutativité de l'addition matricielle on trouve donc $I_3 - C^3 = I_3$ puisque $C^3 = 0$. Ainsi $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. *Le calcul ci-dessus montre que*

   $$(I - C)^{-1} = I_3 + C + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *L'échelonnage de la matrice augmentée donne la solution* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. *La formule* $\vec{x} = (I - C)^{-1} \cdot \vec{b}$ *donne la solution* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12 (Preuve)

Démontrer ce théorème.

Soit A une matrice $n \times n$. Alors s'il existe une matrice C de taille $n \times n$ telle que $AC = I_n$ ou $CA = I_n$ alors A est inversible d'inverse C.

Sol.: *Soit $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$.*
Preuve 1 *:*

- *On montre que $AC = I_n \Rightarrow \mathrm{Vect}\{\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^n$. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on a*
$$AC\vec{x} = I_n\vec{x}.$$
Or $C\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, pour tous $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Donc pour chaque $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, il existe $C\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$A(C\vec{b}) = \vec{b}.$$
Les colonnes de A engendrent donc $\mathbb{R}^n$ et par le théorème de caractérisation des matrices inversibles (paragraphe 2.2), la matrice A est inversible. On a alors $AC = CA = I_n$.
- *On montre que $CA = I_n \Rightarrow$ les colonnes de A sont linéairement indépendantes ou $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\vec{x} = \vec{0}$. On sait que $\vec{0}$ est un vecteur qui vérifie cette équation, et on veut montrer que c'est le seul. On a*
$$CA\vec{x} = C\vec{0} = \vec{0}$$
et $CA = I_n$. Ainsi
$$CA\vec{x} = I_n\vec{x} \text{ et } CA\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow I_n\vec{x} = \vec{0}.$$
Or comme I_n est inversible, $\vec{x} = \vec{0}$ est la seule solution de $A\vec{x} = \vec{0}$. Par le théorème de caractérisation des matrices inversibles (paragraphe 2.2), la matrice A est inversible. On a alors $AC = CA = I_n$.

Preuve 2 *: sans utiliser le théorème de la caractérisation des matrices inversibles (paragraphe 2.2). Mais en montrant que $AC = I_n$ implique $CA = I_n$.*

1. *On montre que $AC = I_n$ implique que les colonnes de C engendrent $\mathbb{R}^n$. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $C\vec{x} = \vec{0}$. Alors $AC\vec{x} = I_n\vec{x}$ et $AC\vec{x} = \vec{0}$ implique que $\vec{0} = I_n\vec{x}$ et $\vec{x} = \vec{0}$. On a donc que $C\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Les colonnes de C sont donc linéairement indépendantes et C possède n pivots (un pivot par ligne). Or comme C est une matrice de taille $n \times n$, il y'a aussi un pivot par colonne. Donc les colonnes de C engendrent $\mathbb{R}^n$.*
2. *Ainsi pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, il existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $C\vec{x} = \vec{b}$.*
Alors
$$CA\vec{b} = CA(C\vec{x}) = C(AC\vec{x}) = C\vec{x} = \vec{b}.$$
Or c'est vrai pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, donc c'est vrai pour les vecteurs de la base canonique, i.e. pour les $\vec{e}_i, i = 1, \ldots, n$. On a alors
$$CA\vec{e}_i = \vec{e}_i, i = 1, \ldots, n.$$
Ceci implique que $CA = I_n$. On a obtenu que $AC = I_n$ implique $CA = I_n$ et donc, par la définition de l'inverse, que la matrice A est inversible.

La preuve $CA = I_n$ implique $AC = I_n$ est similaire.

Exercice 13 (Déterminants)

Calculer le déterminant des matrices suivantes de deux manières différentes. D'abord en utilisant le développement selon la première colonne. Puis en développant selon une colonne ou une ligne bien choisie pour minimiser le nombre de calculs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A : *L'idée est de développer par rapport à une ligne ou une colonne avec beaucoup de zéros pour faire le moins de calculs possible.*
On développe par rapport à la première colonne de A. On obtient

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.$$

B : *On développe par rapport à la deuxième colonne de B :* $\det B = 0$. *On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc* $\det B = 0$.

C : *On développe par rapport à la troisième colonne de C :* $\det C = 0$. *On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc* $\det C = 0$.

D : *On développe par rapport à la première colonne de D. On obtient*
$\det D = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 0.$

E : *On développe par rapport à la première colonne de E. On obtient*

$$\det E = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 84.$$

Exercice 14 (QCM : Produit matriciel)

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- ☐ Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
- ☐ Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Alors $(AB)^T = A^T B^T$.
- ☐ Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- ☐ Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- ☐ Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.

c)
- ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est diagonale.
- ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est scalaire, i.e. $C = \lambda I$, où I est la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est diagonale ou C est diagonale.
- ☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est scalaire ou C est scalaire.

d) Soit A une matrice de taille 7×8 et T l'application linéaire définie par $T\overrightarrow{x} = A \cdot \overrightarrow{x}$. Alors $\overrightarrow{x}$ est un vecteur de

- ☐ $\mathbb{R}^7$
- ☐ $\mathbb{R}^8$
- ☐ $\mathbb{R}^{15}$
- ☐ $\mathbb{R}^{56}$

e) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Alors BA est une matrice $n \times n$.
- ☐ Alors A^T est une matrice $m \times n$.
- ☐ Alors A représente une application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
- ☐ Alors $(AB)^T$ est une matrice $p \times m$.

f) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

- ☐ Si $AC = BC$, alors $A = B$.

☐ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
☐ Si $C = C^{-1}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
☐ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

g) Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors

☐ $A + I$ est inversible.
☐ $(A - I)(A + I) = A^2 - I$.
☐ $(A + I)(A + I) = A^2 + I$.
☐ $(aA)^2 = a(A^2)$.

Sol.:

a) Le point 1 est vrai. En effet, si AB est inversible, alors l'application linéaire représentée par AB est bijective. On en déduit que B est injective et A est surjective, donc A, B sont bijectives, donc inversibles, vu que ce sont des matrices carrées. Ainsi, si A ou B n'est pas inversible, AB n'est pas inversible. Ce raisonnement montre également que le point 2 est faux. Pour voir que le point 3 est faux, prendre $A = I$ et $B = -I$. Pour le point 4, il est vrai que si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, mais l'inverse est donné par $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) La réponse correcte est la 2. Pour le point 1, la formule est $(AB)^T = B^T A^T$. Pour le point 3, il suffit que A soit symétrique. Pour le point 4, on a $(AB)^T = BA$.

c) Le point 1 est faux : prendre, par exemple, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le point 2 est vrai. Pour voir que les points 3 et 4 sont faux, prendre les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

d) $\mathbb{R}^8$.

e) Le produit BA n'est pas bien défini si $m \neq p$. La matrice A^T est de taille $n \times m$. La matrice A représente une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Le point 4 est vrai.

f) Pour voir que les points 1, 2 et 4 sont faux, prendre, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point 3 est vrai, car si on applique $C^{-1} = C$ à droite de chaque côté de l'équation $AC = BC$, on obtient $A = B$.

g) *Pour voir que le point 1 est faux, prendre $A = -I$. Le point 2 est vrai par distributivité :*

$$(A-I)(A+I) = A \cdot A - I \cdot A + A \cdot I - I \cdot I = A^2 - A + A - I = A^2 - I.$$

Le point3 est faux, car il manque le double produit $A \cdot I + I \cdot A = 2A$. Le point 4 n'est vrai que si $a^2 = a$. C'est donc faux en général. Par exemple si $A = I$ et $a = 2$ on a $(2I)^2 = 4I \neq 2I = 2I^2$.

Exercice 15 (QCM : Indépendance linéaire)

Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\b\\0\end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

☐ $b = 1$ ☐ $b = 2$ ☐ $b = 3$ ☐ $b = 4$

Sol.: $b = 4$

Exercice 16 (QCM : Pivots)

Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\1 & 0 & 2 & 3\\1 & 2 & 0 & 3\\1 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

- ☐ la première,
- ☐ la deuxième,
- ☐ la troisième,
- ☐ la quatrième.

Sol.: *Dans cet exercice à choix multiple il s'agit encore une fois d'effectuer des opérations sur les lignes de la matrice*

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\1 & 0 & 2 & 3\\1 & 2 & 0 & 3\\1 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle L2 \leftrightarrow L1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\0 & 1 & -1 & 3\\1 & 2 & 0 & 3\\1 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle L3-L1 \atop L4-L1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\0 & 1 & -1 & 3\\0 & 2 & -2 & 0\\0 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix} \underset{\sim}{\scriptstyle L3-2L2 \atop L4-2L2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\0 & 1 & -1 & 3\\0 & 0 & 0 & -6\\0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

On voit donc que c'est la troisième colonne qui ne contient pas de pivot. Remarquons qu'il y a des choix plus économiques pour échelonner et réduire cette matrice, si on avait voulu résoudre le système associé (ce qui n'est pas le cas).