Série 1 (Corrigé)

Exercice 1 (Équations linéaires)

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$

c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right) x_2 + 3 = \pi x_1$

d) $3x_1 + 2x_2 + 4\, x_3\, x_4 = 5$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}\, x_3 + x_9$

Sol.:

a) non (x_1^2 et x_2^2 sont non-linéaires)

b) oui

c) oui

d) non ($x_3\, x_4$ est non-linéaire)

e) oui

Exercice 2 (Représentation graphique)

Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

a) Dessiner la solution avec les paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 3$.

b) Pour quelles valeurs de α, β la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$?

c) Trouver les valeurs de α, β (si elles existent) telles que le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \\ (\alpha - 1)\, x_1 & + & (\beta + 1)\, x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

i) possède une infinité de solutions ;

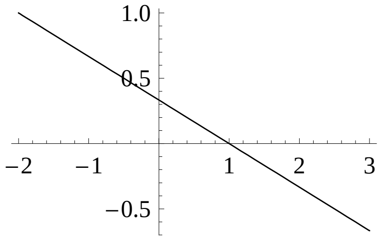
ii) ne possède aucune solution ;

iii) possède une solution unique.

Sol.:

a)

$$x_2 = \frac{1}{3}(1 - x_1)$$



b) Les droites sont parallèles lorsque les vecteurs normaux aux droites $(\alpha,\, \beta)$ *et* $(-1,\, 1)$ *sont proportionnels i.e.* $-\alpha = \beta$*, avec* $(\alpha,\, \beta) \neq 0$ *(pour que la droite existe).*

c) Méthode 1 : On constate que l'équation 1 + l'équation 2 nous donne l'équation 3. Ainsi cette denière ne nous donne pas de nouvelles informations. On a alors le système

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = -1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases}$$

En mutlipliant l'équation par α *(en supposant que* $\alpha \neq 0$*)on obtient*

$$\begin{cases} -\alpha x_1 + \alpha x_2 & = -\alpha \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases} \to \begin{cases} -\alpha x_1 + \alpha x_2 & = -\alpha \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases}$$

Méthode 2(avec l'algo de Gauss-Jordan) : En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ *puis* $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$*, on obtient la forme échelonnée de la matrice augmentée :*

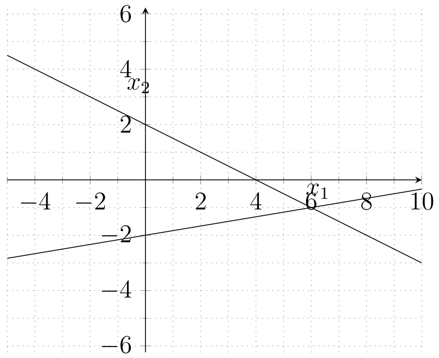
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha + \beta & -\alpha + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha + \beta \neq 0$*, le système linéaire possède une unique solution. Si* $\alpha + \beta = 0$*, le système est dit dégénéré. On a alors deux cas possibles : si* $-\alpha + 1 \neq 0$ *le système ne possède aucune solution (système incompatible) ; si* $-\alpha + 1 = 0$ *(i.e.* $\alpha = 1, \beta = -1$*) alors* x_2 *est une variable libre et il existe une infinité de solutions.*

Exercice 3 (Graphes et droites)

Soient les deux droites d'équations respectives $\frac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 6$ et $x_1 + 2x_2 = 4$. Représenter graphiquement les deux équations dans un systèmes d'axes x_1 et x_2 et déterminer le point d'intersection de ces deux droites

Sol.: *Le point d'intersection est* $(6; -1)$.



Exercice 4 (Système linéaire)

Remplisser les informations manquantes pour chaque système ci-dessous.

a) $m = \underline{\quad}$ équations et $n = \underline{\quad}$ variables

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad 4x_3 &= 5 \\ \quad x_2 &= 2 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \underline{\quad}, & a_{12} = \underline{\quad}, & a_{13} = \underline{\quad} \\ a_{21} = \underline{\quad}, & a_{22} = \underline{\quad}, & a_{23} = \underline{\quad} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \underline{\quad} \\ b_2 = \underline{\quad} \end{matrix}$$

Vérifier que $(-2, 2, \frac{11}{4})$ est une solution du système linéaire. Est- ce que $(-2, 1, \frac{11}{4})$ est une solution du système linéaire ?

b) $m = \underline{\quad}$ équations et $n = \underline{\quad}$ variables

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= -\frac{1}{2} \\ 2x_1 - x_2 &= -5 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \underline{\quad}, & a_{12} = \underline{\quad} \\ a_{21} = \underline{\quad}, & a_{22} = \underline{\quad} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \underline{\quad} \\ b_2 = \underline{\quad} \end{matrix}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

c) $m = \underline{\quad}$ équations et $n = \underline{\quad}$ variables

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \underline{\quad}, & a_{12} = \underline{\quad} \\ a_{21} = \underline{\quad}, & a_{22} = \underline{\quad} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \underline{\quad} \\ b_2 = \underline{\quad} \end{matrix}$$

Vérifier que $(2, 1)$ est une solution du système linéaire. Donner la/les solution(s) du système s'il y'en a d'autres.

d) $m = \underline{\quad}$ équations et $n = \underline{\quad}$ variables

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \underline{\quad}, & a_{12} = \underline{\quad} \\ a_{21} = \underline{\quad}, & a_{22} = \underline{\quad} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \underline{\quad} \\ b_2 = \underline{\quad} \end{matrix}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

Sol.:

a) Non ce n'est pas une solution.

b) il n'y a pas de solutions.

c) Il n'y a qu'une solution.

d) Ce système a une infinité de solutions.

Exercice 5 (Représentation graphique)

On considère l'équation $ax + by = 2$.

a) Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les solutions lorsque $a = 2$ et $b = -1$.
b) Même question pour $a = 1$ et $b = 2$.
c) Estimer géométriquement la solution du système

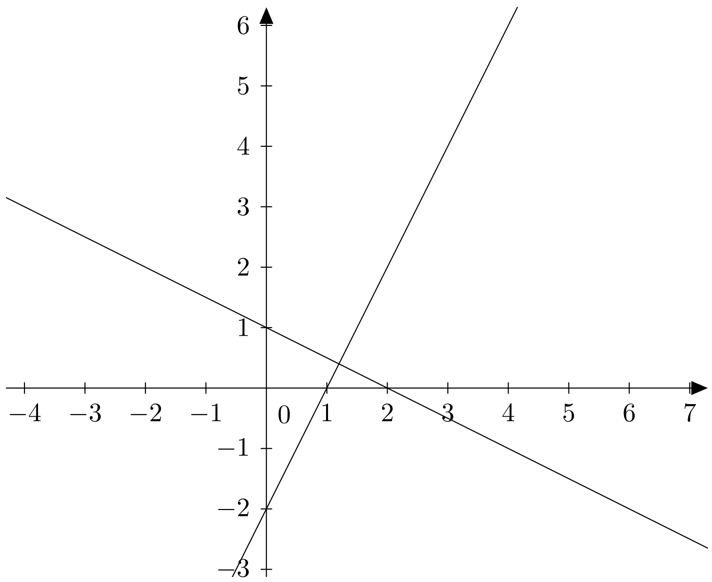
$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

sur l'illustration des points a) et b), puis résoudre le système.

Sol.: *On considère l'équation $ax + by = 2$.*

a) L'équation $2x - y = 2$ est équivalente à $y = 2x - 2$. Il s'agit donc d'une droite de pente 2 et d'ordonnée à l'origine -2.

b) Ici la pente est $-1/2$ et l'ordonnée à l'origine vaut 1. Cette droite est perpendiculaire à la première :



c) On voit que les droites se coupent lorsque x est un peu plus grand que 1. Résolvons donc le système pour nous en assurer :

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \quad \rightsquigarrow \quad L_1 - 2L_2 & -5y &= -2 \\ x + 2y &= 2 & x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi $y = \dfrac{2}{5}$ et en remplaçant dans la deuxième équation on trouve $x = 2 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{6}{5}$.

Exercice 6 (Représentation graphique)

Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 5x_2 &=& 0 \\ -x_1 - 2x_2 &=& 0 \\ 3x_1 - 3x_2 &=& 1 \end{array}\right.$$

a) Est-ce que le système est compatible ?

b) Donner un'interprétation géométrique du résultat.

Sol.:

a) En utilisant des opérations sur les équations, on voit que le système est incompatible. Autre méthode : Le système a pour matrice augmentée

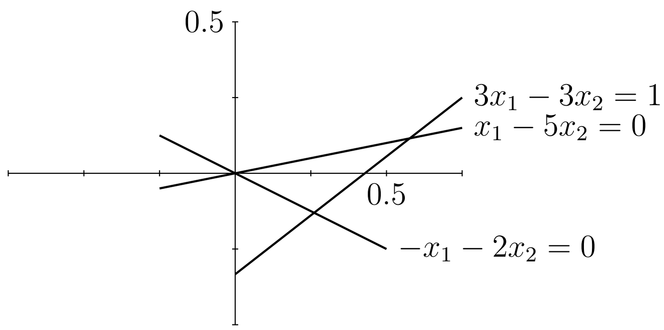
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que ce système ne possède pas de solution.

b) Si on dessine les trois droites sur le plan, on peut voir qu'elles ne se rencontrent pas en un seul point.



Exercice 7 (Polynôme de degré 2)

Trouver le polynôme de degré 2 de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$ dont le graphe passe par les points $(1, -1)$, $(2, 3)$ et $(3, 13)$. Esquisser le graphe de ce polynôme.

Sol.: *Comme le graphe du polynôme $f(t) = at^2 + bt + c$ passe par les points $(1, -1)$, $(2, 3)$ et $(3, 13)$, nous trouvons le système*

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

En utilisant soit la substitution, soit des opérations sur les équations, on arrive à obtenir que $a = 3$, $b = -5$, *et* $c = 1$
Autre méthode : La réduction de Gauss–Jordan de la matrice augmentée du système nous donne

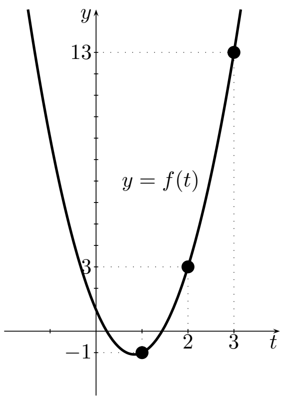
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 13 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Par conséquent,

$$a = 3\,, \quad b = -5\,, \quad \textit{et} \quad c = 1$$

et le polynôme cherché est

$$f(t) = 3t^2 - 5t + 1\,.$$



Exercice 8 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Toutes les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles.	□	□
b) Une matrice de taille 5×6 a 6 lignes.	□	□
c) L'ensemble des solutions d'un système linéaire dans les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une liste de nombres $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui, substitués à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement, rendent correcte chaque équation du système.	□	□
d) L'existence et l'unicité d'une solution sont deux questions fondamentales pour un système linéaire.	□	□

Sol.: *Vrai : a), c), d). Faux : b).*

Exercice 9 (QCM)

Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 18 \\ x + 2y + z = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

- ☐ $z = 2$
- ☐ $z = 3$
- ☐ $z = 4$
- ☐ $z = 5$

Sol.: $z = 5$