

Exercices — Série 14

Mots-clés: décomposition en valeur singulières, chaînes de Markov discrètes.

Question 1 Soit A une matrice de taille $m \times n$.

- a) Montrer que $\text{Ker} A = \text{Ker}(A^T A)$.
- b) Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Question 2

Pour les matrices ci-dessous déterminer

$$\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} \text{ et } \min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Question 3 Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 4 Soit A une matrice de taille $n \times n$.

- i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.
- ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A , donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1} .

Question 5 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si A est une matrice de taille $n \times n$ telle que 0 est l'unique valeur propre de A , alors $A = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

- b) Si A est une matrice symétrique de taille $n \times n$ telle que 0 est l'unique valeur propre de A , alors $A = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

- c) La matrice d'une forme quadratique est symétrique.

☐ VRAI ☐ FAUX

- d) Une forme quadratique définie positive satisfait $Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

- e) Si les valeurs propres d'une matrice symétrique A sont toutes strictement positives, alors la forme quadratique $x^T A x$ est définie positive.

☐ VRAI ☐ FAUX

- f) Si les coefficients de A (symétrique) sont tous ≥ 0 alors $q(x) = x^T A x$ est définie positive.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 6 Considérons une matrice $P = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont des nombres compris entre 0 et 1.

- a) Est-ce que P est une matrice de transition?

- b) Trouver les valeurs propres de P en fonction de p et q .

- c) Expliquer pourquoi P est diagonalisable (pour tous choix de p et q)

- d) Diagonaliser P en fonction de p et q .

- e) Donner des conditions sur p et q pour l'existence de $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$.

- f) Calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ lorsque cette limite existe.

Question 7 On considère la population d'une région, divisée en population rurale et population urbaine. On note $R(n)$ et $U(n)$ les populations rurales et urbaines à l'année n . On notera par a le taux d'exode rural annuel et par b le taux d'exode urbain (que l'on supposera constants).

- (a) Écrivez des équations qui expriment $R(n+1)$ et $U(n+1)$ en fonction de $R(n), U(n), a$ et b .
- (b) Écrivez ces équations en une seule équation matricielle.
- (c) Prenons les valeurs $a = 0.2$ et $b = 0.1$, ainsi que $R(0) = 100000 = U(0)$. Calculez la population rurale et urbaine à la troisième année.
- (d) Donnez une formule qui permet de calculer $R(n)$ et $U(n)$ pour tout entier n .

Question 8

Après une étude sur 100 ans sur la succession de jours *pluvieux* et *secs* dans une ville on a récolté les statistiques suivantes:

- Si un jour est sec on a 75% de chances que le jour d'après soit sec aussi.
 - Si un jour est pluvieux on a 66,2% de chances que le jour suivant soit pluvieux également.
- a) Décrire la situation en proposant un modèle de Markov et sa matrice de transition.
 - b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, calculer la probabilité qu'il pleuve dans 1,2,3 et 10 jours.
 - c) Est-ce que la probabilité qu'il fasse beau dans k jours tend vers une certaine valeur lorsque k tend vers l'infini? Si oui calculer cette valeur.

Indication: On pourra s'aider des résultats de l'exercice 6.

Question 9 [Exercice facultatif (plus difficile)]

Deux chiens^a se partagent n puces. À chaque instant une des n puces au hasard saute d'un chien à l'autre. Choisissons de regarder un seul des deux chiens et de compter le nombre de puces qu'il a sur le dos. On notera E_i l'état dans lequel le chien en question a exactement i puces sur son dos.

- a) Exprimer les probabilités de transition $p_{i,i+1}$ et $p_{i,i-1}$ pour tout i .
- b) Quelles sont les autres probabilités de transition?
- c) Écrire la matrice de transition pour $n = 4$.
- d) Trouver un vecteur stationnaire pour la matrice de transition.
- e) Généraliser les deux points ci-dessus à tout n .

^aCet exemple est tiré de l'article *Chaîne de Markov* sur Wikipedia. Une version plus sérieuse de ce modèle – avec des boules et des urnes – a été proposée pour la première fois par Paul et Tatjana Ehrenfest in *Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem*. Physikalische Zeitschrift, vol. 8 (1907), pp. 311 –314.

♣ Toute l'équipe vous souhaite une bonne nouvelle année ♣
et tous nos vœux de réussite pour les examens!