

Exercices — Série 14

Mots-clés: décomposition en valeur singulières, chaînes de Markov discrètes.

Question 1 Soit A une matrice de taille $m \times n$.

- Montrer que $\text{Ker} A = \text{Ker}(A^T A)$.
- Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Solution:

- Si $Ax = 0$, alors $A^T Ax = 0$, ce qui montre $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^T A)$. Soit x tel que $A^T Ax = 0$, alors $x^T A^T Ax = 0$. Or, $x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2$. Ainsi, $Ax = 0$, et $\text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A)$. D'où l'égalité.
- Les colonnes de A sont linéairement indépendantes $\iff \text{Ker}(A) = \{0\}$. Ainsi, d'après a), les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si $\text{Ker}(A^T A) = \{0\}$, c'est-à-dire la matrice (carrée) $A^T A$ est inversible.

Question 2

Pour les matrices ci-dessous déterminer

$$\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} \text{ et } \min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution:

- Les valeurs propres de $A^T A$ sont 18^2 et 5^2 . Les valeurs de $\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$ et $\min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$ sont données respectivement par la racine carrée de la plus grande et de la plus petite valeur propre de la matrice $A^T A$. Il s'ensuit que $\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 18$ et $\min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 5$.
- Les valeurs propres de $A^T A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}$ sont 90 et 10. Donc, $\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 3\sqrt{10}$ et $\min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = \sqrt{10}$.

- c) Les valeurs propres de $A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ sont 25, 9 et 0.
Donc, $\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 5$ et $\min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = 0$.

Question 3 Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution:

- a) Pour la matrice A . Les valeurs propres de $A^T A$ sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$. On obtient $\sigma_1 = 2$ et $\sigma_2 = 0$. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite $Av_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On cherche une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, on prend $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour compléter le vecteur Av_1 . On obtient facilement

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Pour la matrice B . On a $B^T B = \begin{pmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 90$ et $\lambda_2 = 0$. On calcule les vecteurs propres v_1, v_2 , et on les normalise. On obtient la matrice V

$$V = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

On a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule Bv_1 et Bv_2

$$Bv_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ et } Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a que $\{Bv_1\}$ est une base de $\text{Im}(B)$. On doit la compléter avec deux vecteurs orthogonaux. Comme condition on a $w \cdot Bv_1 = 0$ ce qui donne $x - 2y - 2z = 0$. On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux entre eux. On doit faire Gram-Schmidt. On obtient

$$U = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{5} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$$

c) On calcule $C^T C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$. Les vecteurs propres de $C^T C$ correspondants sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a obtenu les colonnes de la matrice V . Pour la matrice U qui est 3×3 , il nous faut

$$Cv_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } Cv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{Cv_1, Cv_2\}$ est une base orthogonale de $\text{Im}(C)$. Mais il nous manque un vecteur orthogonal aux deux autres pour avoir une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. On sait que $w \cdot Cv_1 = 0$ et $w \cdot Cv_2 = 0$. On obtient un système à résoudre (en

posant $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Un vecteur w possible est $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, que l'on normalise pour trouver les colonnes de U :

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Finalement la matrice Σ est

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 4 Soit A une matrice de taille $n \times n$.

- i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.
- ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A , donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1} .

Solution:

- i) On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières. On a $\det(A) = \det(U) \det(\Sigma) \det(V)$, avec $\det(U) \neq 0$ et $\det(V) \neq 0$ (car U et V sont inversibles), ainsi

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(\Sigma) \neq 0$$

et A est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont non nulles.

- ii) On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières, inversible d'après la question i). Ainsi, en inversant cette relation (on utilise $U^{-1} = U^T$ et $V^{-1} = V^T$), on obtient la décomposition en valeurs singulières cherchée $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.

Question 5 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si A est une matrice de taille $n \times n$ telle que 0 est l'unique valeur propre de A , alors $A = 0$.



VRAI



FAUX

- b) Si A est une matrice symétrique de taille $n \times n$ telle que 0 est l'unique valeur propre de A , alors $A = 0$.



VRAI



FAUX

- c) La matrice d'une forme quadratique est symétrique.



VRAI



FAUX

- d) Une forme quadratique définie positive satisfait $Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.



VRAI



FAUX

- e) Si les valeurs propres d'une matrice symétrique A sont toutes strictement positives, alors la forme quadratique $x^T A x$ est définie positive.



VRAI



FAUX

- f) Si les coefficients de A (symétrique) sont tous ≥ 0 alors $q(x) = x^T A x$ est définie positive.



VRAI



FAUX

Solution:

- a) Faux: par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) Vrai. Comme A est symétrique, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable: $A = PDP^T$ où D est une matrice diagonale dont les valeurs diagonales sont les valeurs propres. D'après l'hypothèse $D = 0$ (la matrice nulle) et donc $A = 0$ aussi.
- c) Vrai, par définition.
- d) Faux: pour le vecteur nul on a toujours $Q(x) = 0$.
- e) Vrai: c'est une conséquence du théorème de diagonalisation orthogonale vue en classe (les deux conditions sont même équivalentes).
- f) Faux: par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a comme valeurs propres $\lambda = \pm 1$ elle est donc non définie.

Question 6 Considérons une matrice $P = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont des nombres compris entre 0 et 1.

- a) Est-ce que P est une matrice de transition?
- b) Trouver les valeurs propres de P en fonction de p et q .
- c) Expliquer pourquoi P est diagonalisable (pour tous choix de p et q)
- d) Diagonaliser P en fonction de p et q .
- e) Donner des conditions sur p et q pour l'existence de $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$.
- f) Calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ lorsque cette limite existe.

Solution:

- a) Oui il s'agit d'une matrice de transition car les coefficients de P sont positifs et la somme des coefficients de chaque colonne de P vaut 1.
- b) On calcule le polynôme caractéristique de P :

$$\det(P - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - (1 - p - q)).$$

On trouve donc les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1 - p - q$.

- c) Si $p + q \neq 0$ alors $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et donc P est diagonalisable (matrice de taille 2×2 ayant 2 valeurs propres distinctes). Si $p + q = 0$, comme les nombres p, q sont positifs, implique que $p = q = 0$ auquel cas la matrice $P = I_2$ qui est déjà diagonale.
- d) Si $p + q \neq 0$ on cherche les espaces propres associés à $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1 - p - q$ et on trouve respectivement:

$$E_1 = \{t(q, p) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad E_{1-p-q} = \{t(-1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

On a donc la matrice de passage S , son inverse et la matrice diagonale D comme suit:

$$S = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$$

Avec ces matrices on a $P = SDS^{-1}$ et $D = S^{-1}PS$.

- e) Pour tout entier k on a l'égalité $P^k = SD^kS^{-1}$. Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ existe si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} (1-p-q)^k$ existe. Comme $-1 \leq 1-p-q \leq 1$, on voit que cette dernière limite existe si $p+q \neq 2$. Ainsi on a $\lim_{k \rightarrow \infty} (1-p-q)^k = 1$ si $p+q = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} (1-p-q)^k = 0$ si $p+q \neq 0$
- f) Si $0 < p+q < 2$ de l'égalité $P^k = SD^kS^{-1}$ et des points précédents on tire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \lim_{k \rightarrow \infty} SD^kS^{-1} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$$

Si $p+q = 0$ alors $p = q = 0$ et $P = I_2$

Question 7 On considère la population d'une région, divisée en population rurale et population urbaine. On note $R(n)$ et $U(n)$ les populations rurales et urbaines à l'année n . On notera par a le taux d'exode rural annuel et par b le taux d'exode urbain (que l'on supposera constants).

- (a) Écrivez des équations qui expriment $R(n+1)$ et $U(n+1)$ en fonction de $R(n), U(n), a$ et b .
- (b) Écrivez ces équations en une seule équation matricielle.
- (c) Prenons les valeurs $a = 0.2$ et $b = 0.1$, ainsi que $R(0) = 100000 = U(0)$. Calculez la population rurale et urbaine à la troisième année.
- (d) Donnez une formule qui permet de calculer $R(n)$ et $U(n)$ pour tout entier n .

Solution:

- (a) On trouve $R(n+1) = (1-a)R(n) + bU(n)$ et $U(n+1) = aR(n) + (1-b)U(n)$.

- (b) Posons $X_n = \begin{pmatrix} R(n) \\ U(n) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$. Alors les équations ci-dessus s'écrivent $AX_n = X_{n+1}$. Ou encore

$$\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(n) \\ U(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(n+1) \\ U(n+1) \end{pmatrix}.$$

- (c) On a ici $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 100'000 \\ 100'000 \end{pmatrix}$.

$$\text{On calcule alors } X_3 = A^3 X_0 = \begin{pmatrix} 0.562 & 0.219 \\ 0.438 & 0.781 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100'000 \\ 100'000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78'100 \\ 121'900 \end{pmatrix}$$

- (d) Grâce à la formule de diagonalisation trouvée à l'exercice 6 on a $A^n = S D^n S^{-1} =$

$$\frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{pmatrix}$$

$$\text{et } X_n = A^n X_0$$

Question 8

Après une étude sur 100 ans sur la succession de jours *pluvieux* et *secs* dans une ville on a récolté les statistiques suivantes:

- Si un jour est sec on a 75% de chances que le jour d'après soit sec aussi.
 - Si un jour est pluvieux on a 66,2% de chances que le jour suivant soit pluvieux également.
- a) Décrire la situation en proposant un modèle de Markov et sa matrice de transition.
 - b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, calculer la probabilité qu'il pleuve dans 1,2,3 et 10 jours.
 - c) Est-ce que la probabilité qu'il fasse beau dans k jours tend vers une certaine valeur lorsque k tend vers l'infini? Si oui calculer cette valeur.

Indication: On pourra s'aider des résultats de l'exercice 6.

Solution:

- a) Notons $sec(k)$ (resp. $pluie(k)$) la probabilité qu'il ne pleuve pas (resp. qu'il pleuve) dans k jours et posons

$$x(k) = \begin{pmatrix} sec(k) \\ pluie(k) \end{pmatrix}$$

On a que $x(k) = P^k x(0)$ où P est la matrice de transition donnée à l'exercice 1 pour des valeurs de $p = 0.25$ et $q = 0.338$ soit

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.338 \\ 0.25 & 0.662 \end{pmatrix}$$

- b) On utilise les calculs et les notations de l'exercice ci-dessus. On doit calculer la deuxième coordonnée du vecteur $x(i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et 10. Puisque P est diagonalisable on a $P = SDS^{-1}$ et donc $P^k = SD^k S^{-1}$. Pour $k = 10$ par exemple on trouve

$$P^{10} = SD^{10}S^{-1} = \begin{pmatrix} 0.57489 & 0.57475 \\ 0.42511 & 0.42525 \end{pmatrix}$$

et donc $x(10) = P^{10}x(0) = \begin{pmatrix} 0.57489 \\ 0.42511 \end{pmatrix}$. D'où la probabilité cherchée $pluie(10) = 0.42511$.

- c) Oui, d'après l'exercice 1 puisque $p + q \neq 2$. On a la valeur du vecteur stationnaire:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.57483 \\ 0.42517 \end{pmatrix}$$

Donc la probabilité qu'il fasse beau dans k jours tend vers 0.57483 quand k tend vers l'infini.

Question 9 [Exercice facultatif (plus difficile)]

Deux chiens^a se partagent n puces. À chaque instant une des n puces au hasard saute d'un chien à l'autre. Choisissons de regarder un seul des deux chiens et de compter le nombre de puces qu'il a sur le dos. On notera E_i l'état dans lequel le chien en question a exactement i puces sur son dos.

- Exprimer les probabilités de transition $p_{i,i+1}$ et $p_{i,i-1}$ pour tout i .
- Quelles sont les autres probabilités de transition?
- Écrire la matrice de transition pour $n = 4$.
- Trouver un vecteur stationnaire pour la matrice de transition.
- Généraliser les deux points ci-dessus à tout n .

^aCet exemple est tiré de l'article *Chaîne de Markov* sur Wikipedia. Une version plus sérieuse de ce modèle – avec des boules et des urnes – a été proposée pour la première fois par Paul et Tatjana Ehrenfest in *Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem*. Physikalische Zeitschrift, vol. 8 (1907), pp. 311 –314.

Solution:

- a) Notons tout d'abord qu'il existe $n + 1$ états pour notre chien : il peut avoir 0 puces sur le dos (état E_0), 1, ..., jusqu'à n puces (état E_n). Les probabilités de transition $p_{i,i+1}$ et $p_{i,i-1}$ sont les probabilités de passer de l'état E_i respectivement à l'état E_{i+1} et à l'état E_{i-1} à l'instant suivant. Distinguons les différents cas :

- Si $0 < i < n$, alors les états E_{i+1} et E_{i-1} existent bien. Supposant que les n puces ont la même probabilité de sauter d'un chien à l'autre, on obtient une probabilité i/n que la puce qui saute appartienne au chien considéré et $(n - i)/n$ à l'autre chien. Dans le premier cas, on aboutit à l'état E_{i-1} , et dans le deuxième cas, à l'état E_{i+1} . Par conséquent :

$$p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{n}, \quad p_{i,i-1} = \frac{i}{n}.$$

- Si $i = 0$, alors E_{i-1} n'existe pas, et à l'instant suivant une puce sautera forcément sur notre chien :

$$p_{i,i+1} = p_{0,1} = 1 = 1 - \frac{i}{n}.$$

- Si $i = n$, alors E_{i+1} n'existe pas, et à l'instant suivant une puce quittera forcément notre chien pour sauter sur l'autre :

$$p_{i,i-1} = p_{n,n-1} = 1 = \frac{i}{n}.$$

- b) D'après les données du problème, toutes les autres probabilités de transition sont nulles : à chaque instant, le chien gagne ou perd exactement une puce.
- c) En utilisant les résultats des questions précédentes, on calcule la matrice de transition pour $n = 4$, qui est de taille 5×5 :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

- d) Pour trouver un vecteur stationnaire, on résout le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{aligned} 0.25x_1 &= x_0, \\ x_0 + 0.5x_2 &= x_1, \\ 0.75x_1 + 0.75x_3 &= x_2, \\ 0.5x_2 + x_4 &= x_3, \\ 0.25x_3 &= x_4. \end{aligned}$$

Prenons par exemple $x_0 = 1$, on déduit :

$$\begin{aligned} x_1 &= 4, \\ x_2 &= 6, \\ x_3 &= 4, \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Au passage, on reconnaît les coefficients binomiaux: $x_i = C_4^i$ pour $0 \leq i \leq 4$. Enfin, on normalise ce vecteur propre en divisant par la somme des composantes $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$, ce qui donne le vecteur stationnaire :

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/4 \\ 3/8 \\ 1/4 \\ 1/16 \end{pmatrix}.$$

e) Pour n général, la matrice s'écrit d'après les questions 1/ et 2/ :

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{n} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver un vecteur propre de P_n pour la valeur 1 : $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, on commence par poser $x_0 = 1$ comme précédemment, on obtient ensuite successivement :

$$x_1 = n, \quad \frac{2x_2}{n} + 1 = n \quad \implies \quad x_2 = \frac{n(n-1)}{2},$$

et on reconnaît ici aussi les premiers coefficients binomiaux qui s'écrivent de façon générale $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. En fait, ceux-ci sont bien solution du système grâce à la propriété :

$$\begin{aligned} p_{i+1,i}C_n^{i+1} + p_{i-1,i}C_n^{i-1} &= \frac{i+1}{n}C_n^{i+1} + \frac{n-i+1}{n}C_n^{i-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{n-i}{n} + \frac{i}{n} \right) \end{aligned}$$

Et donc nous avons que

$$\boxed{p_{i+1,i}C_n^{i+1} + p_{i-1,i}C_n^{i-1} = C_n^i.}$$

Ainsi, on vérifie par le calcul que le vecteur $X_n = (C_n^i)_{0 \leq i \leq n}$ est un vecteur propre de P_n pour la valeur propre 1. Pour trouver un vecteur stationnaire, on

normalise X en divisant chacune des composantes par leur somme : comme on sait que

$$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n,$$

on obtient comme vecteur stationnaire pour le modèle de Ehrenfest :

$$v_n = 2^{-n} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ C_n^2 \\ \vdots \\ C_n^i \\ \vdots \\ C_n^n \end{pmatrix}.$$

♣ Toute l'équipe vous souhaite une bonne nouvelle année ♣
et tous nos vœux de réussite pour les examens!