

## Exercices — Série 11

**Mots-clés:** produit scalaire, norme, orthogonalité, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, bases orthogonales/orthonormées, projections/matrices orthogonales.

### Question 1

a) Soient  $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Calculer

$$u \cdot v, \quad v \cdot w, \quad \frac{u \cdot w}{\|v\|}, \quad \frac{1}{w \cdot w} w, \quad \frac{u \cdot w}{\|v\|} v.$$

b) Calculer la distance entre  $u$  et  $v$  et la distance entre  $u$  et  $w$ .

c) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à  $u, v, w$  (pointant dans la même direction que le vecteur original).

### Solution:

$$\text{a) } u \cdot v = 7, \quad v \cdot w = 10, \quad \frac{u \cdot w}{\|v\|} = \frac{39}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{w \cdot w} w = \frac{1}{61} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{u \cdot w}{\|v\|} v = \frac{39}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \|u - v\| = \sqrt{17}, \quad \|u - w\| = 3.$$

c) Notation: pour  $v \in \mathbb{R}^n$  on pose  $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$  le vecteur unitaire correspondant.

$$\text{Alors } \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Question 2** Soit  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $W = \text{Vect}\{v\}$ . Donner l'ensemble  $W^\perp$  des vecteurs orthogonaux à  $v$ . Est-ce que  $W^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ ? Si oui, de quelle dimension?

**Solution:**  $W^\perp = \left\{ w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3a + 2b + c = 0 \right\}$ . En fait  $W^\perp$  est le noyau de la transformation linéaire  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $w \mapsto v \cdot w$ . Il s'agit

donc d'un espace vectoriel. La transformation  $T$  est non nulle (par exemple  $v \cdot v > 0$ ) donc de rang 1. Par le théorème du rang, la dimension de  $W^\perp$  est donc  $3 - 1 = 2$ , il s'agit d'un plan (appelé le plan orthogonal au vecteur  $v$ ).

### Question 3

- Décrire l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui sont orthogonaux à  $e_1 = (1, 0, 0)$ , puis à  $e_2 = (0, 1, 0)$ , et enfin simultanément à  $e_1$  et  $e_2$ . Idem avec  $e_1$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$ , puis  $e_2$  et  $e_3$ . Combien il y a-t-il de vecteurs orthogonaux à  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  simultanément?
- Trouver la projection orthogonale  $p$  du vecteur  $a = (2, 2, 2)$  sur la droite engendrée par le vecteur  $b = (-1, -2, -3)$ .
- Trouver la distance du vecteur  $a$  à la droite engendrée par  $b$ .
- Montrer que  $\|p\| = \|a\| |\cos \theta|$ , où  $\theta$  est l'angle formé par  $a$  et  $b$ .

### Solution:

- Tout vecteur de la forme  $(0, u_2, u_3)$  est orthogonal à  $(1, 0, 0)$ . Donc l'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $e_1$  est le plan  $yz$ . De même, les vecteurs orthogonaux à  $(0, 1, 0)$  forment le plan  $xz$ . Les vecteurs qui sont orthogonaux à la fois à  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 1, 0)$  sont de la forme  $(0, 0, u_3)$ . Ils sont sur l'axe des  $z$ .

De façon similaire, les vecteurs orthogonaux à  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  sont sur l'axe des  $y$ , tandis que les vecteurs orthogonaux à  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 1, 0)$  sont sur l'axe des  $x$ .

Le seul vecteur orthogonal à  $e_1$ ,  $e_2$  and  $e_3$  est  $(0, 0, 0)$ .

- Le vecteur  $p$  est donné par la formule :  $p = \text{proj}_b(a) = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b = (-12/14)b = (-6/7)b = (6/7, 12/7, 18/7)$ .
- La distance de  $a$  à la droite engendrée par  $b$  est égale à la distance de  $a$  à  $p$ , ainsi elle vaut:  $\sqrt{(2 - 6/7)^2 + (2 - 12/7)^2 + (2 - 18/7)^2} = 2\sqrt{3/7}$ .
- $\|p\| = \frac{|a \cdot b|}{\|b\|^2} \|b\| = \frac{|a \cdot b| \|b\|}{\|b\|^2} = \frac{(\|a\| \|b\| |\cos \theta|) \|b\|}{\|b\|^2} = \|a\| |\cos(\theta)|$ .

**Question 4** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  et  $U = \text{Ker}(A)$ . Alors  $U^\perp$  est égal à

☒  $\text{Lgn}(A)$

☐  $\text{Ker}(A)$

☐  $\text{Im}(A)$

☐  $\mathbb{R}^3$

**Solution:** Nous avons vu en cours que  $\text{Ker}(A) = \text{Lgn}(A)^\perp$  et que  $(W^\perp)^\perp = W$  pour tout sous-espace  $W$ . Donc  $\text{Ker}(A)^\perp = (\text{Lgn}(A)^\perp)^\perp = \text{Lgn}(A)$ .

**Question 5** Soient  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

a) Les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  sont orthogonaux.

☒ VRAI ☐ FAUX

b) La projection orthogonale  $\text{proj}_W(v)$  de  $v$  sur  $W = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$  est égale à

☐  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ☐  $\begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$  ☒  $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$  ☐  $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Dans la décomposition  $v = z + \text{proj}_W(v)$ , où  $z \in W^\perp$ ,  $z =$

☐  $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$  ☐  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  ☒  $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Solution:**

a) Un calcul direct donne  $u_1 \cdot u_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$ .

b) Comme  $u_1$  et  $u_2$  sont orthogonaux on peut utiliser la formule vue en cours:

$$\text{proj}_W(v) = \frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{6}{3} u_1 + \frac{-3}{2} u_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c)  $v = z + \text{proj}_W(v)$ , où  $\text{proj}_W(v)$  est calculé dans b),

$$\text{et } z \text{ est donné par } z = v - \text{proj}_W(v) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on peut vérifier que  $z \cdot u_1 = z \cdot u_2 = 0$ , c'est-à-dire  $z \in W^\perp$ .

**Question 6**

Soient les vecteurs  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Soit  $w$  la meilleure approximation de  $v$  par un vecteur de la forme  $\alpha w_1 + \beta w_2$ . Alors  $w =$

☐  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 
☐  $\begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$ 
☐  $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ 
☒  $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

**Solution:** Soit  $W = \text{Vect}\{w_1, w_2\}$ . La meilleure approximation  $w = \alpha w_1 + \beta w_2$  de  $v$  correspond à la projection orthogonale  $\text{proj}_W(v)$ .

**Attention,** ici  $w_1$  et  $w_2$  ne sont pas orthogonaux ( $w_1 \cdot w_2 \neq 0$ ), on ne peut donc pas utiliser la formule comme à l'exercice ci-dessus. On utilise donc la définition de projection orthogonale: La projection orthogonale  $\text{proj}_W(v)$  est le seul vecteur  $w$  vérifiant  $w \in W$  et  $v - w \in W^\perp$ :

$$\begin{cases} (w - v) \cdot w_1 = 0 \\ (w - v) \cdot w_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha w_1 \cdot w_1 + \beta w_2 \cdot w_1 = v \cdot w_1 \\ \alpha w_1 \cdot w_2 + \beta w_2 \cdot w_2 = v \cdot w_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases}.$$

La solution est  $\alpha = -1/2$ ,  $\beta = 4/3$ . Par conséquent,

$$w = -\frac{1}{2}w_1 + \frac{4}{3}w_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

**Question 7**

- Soit  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer le cosinus des angles formés par  $x$  avec les axes de coordonnées.
- En déduire l'ensemble de tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui forment le même angle avec les trois axes de coordonnées.
- Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs  $(a, b, c)$  et  $(1, 1, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  et en déduire que pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  on a

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

- Soit  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Notons par  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les angles formés par  $x$  avec les axes de coordonnées. En utilisant les points antérieurs, démontrer qu'on a les inégalités

$$-\sqrt{6} \leq \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \leq \sqrt{6}.$$

**Solution:** Pour un vecteur  $x \in \mathbb{R}^3$  notons par  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  les angles formés par  $x$  et les 3 axes de coordonnées respectivement.

- a) Soit  $x = (x_1, x_2, x_3)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . On sait que, par la formule de projection orthogonale sur les axes de coordonnées, on a  $x \cdot e_1 = \|x\| \|e_1\| \cos(\alpha)$ . De là on trouve  $\|x\| \cos(\alpha) = x_1$  et donc  $\cos(\alpha) = \frac{x_1}{\|x\|}$ . De même on a que  $\cos(\beta) = \frac{x_2}{\|x\|}$  et  $\cos(\gamma) = \frac{x_3}{\|x\|}$ .
- b) Soit  $x \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\alpha = \beta = \gamma$ . Alors  $\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma)$  et par conséquent  $x_1 = x_2 = x_3$ .
- c) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour  $(a, b, c)$  et  $(1, 1, 1)$  et on trouve  $|a + b + c| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{3}$ . On élève le tout au carré pour trouver la formule souhaitée.
- d) Par le point ci-dessus on a

$$|\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)| \leq \sqrt{3} \sqrt{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma)}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)| &\leq \sqrt{3} \sqrt{3 - (\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma))} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{3 - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\|x\|^2}} = \sqrt{3(3 - 1)} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

**Question 8** Soient  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  deux bases orthonormales de  $\mathbb{R}^n$ . On définit les matrices de taille  $n \times n$ ,  $U = (u_1 | \dots | u_n)$  et  $V = (v_1 | \dots | v_n)$ . Montrer que  $U^T U = I_n$ ,  $V^T V = I_n$  et que  $UV$  est inversible.

**Solution:**

$$\begin{aligned} U^T U &= \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n) = \begin{pmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \cdots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \cdots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \cdots & u_n^T u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n. \end{aligned}$$

Comme  $v_1, \dots, v_n$  vérifient les mêmes hypothèses, on a également  $V^T V = I_n$ .  
 $UV$  est inversible car  $V^T U^T UV = V^T V = I_n$ , d'où  $(UV)^{-1} = V^T U^T$ .

**Question 9** Soit  $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Alors

☐  $A$  n'est pas inversible

☐  $A^T A = I_3$

☒  $\frac{A}{\sqrt{6}}$  est orthogonale

☐  $A$  est orthogonale

**Solution:** Les colonnes de  $A$  sont orthogonales mais pas orthonormées. Un simple calcul donne  $A^T A = \sqrt{6}I_3$ , donc  $\frac{A}{\sqrt{6}}$  est orthogonale.

**Question 10** Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Une base d'un sous-espace vectoriel  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est une base orthonormale.

☐ VRAI      ☒ FAUX

- b) Un ensemble  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  orthogonal de vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^n$  est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.

☒ VRAI      ☐ FAUX

- c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général.

☒ VRAI      ☐ FAUX

- d) Si  $x$  n'appartient pas au sous-espace vectoriel  $W$ , alors  $x - \text{proj}_W(x)$  n'est pas nul.

☒ VRAI      ☐ FAUX

- e) Tout ensemble orthonormal de  $\mathbb{R}^n$  est linéairement dépendant.

☐ VRAI      ☒ FAUX

- f) Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $v$  est dans  $W$  et dans  $W^\perp$ , alors  $v = 0$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

- g) Si  $U$  est une matrice de taille  $m \times n$  avec des colonnes orthonormales, alors  $U^T U x = x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Solution:**

- a) Faux. Pour que des vecteurs forment une base orthonormale il faut qu'ils soient de norme 1 (en plus d'être orthogonaux deux à deux).
- b) Vrai. Deux vecteurs orthogonaux non nuls sont linéairement indépendants.

- c) Vrai. Dans une base orthonormale  $(b_1, \dots, b_n)$  les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et non nuls (car ils ont une norme égale à 1), donc linéairement indépendants. Il s'agit donc aussi d'une base orthogonale.
- d) Vrai. Si  $x - \text{proj}_W(x) = 0$  cela signifie que  $x = \text{proj}_W(x)$  et donc  $x \in W$ .
- e) Faux. Un ensemble orthonormal possède des vecteurs 2 à 2 orthogonaux et non nuls (car de norme 1). Ces vecteurs sont donc linéairement indépendants!
- f) Vrai. Si  $w \in W \cap W^\perp$  alors  $w \cdot w = 0$  et donc  $w = 0$ .
- g) Vrai. On a vu en cours que, pour  $A$  de taille  $m \times n$  le produit matriciel  $A^T A$  se calcule facilement à l'aide de produits scalaires des colonnes de  $A$ : plus précisément, le coefficient  $(A^T A)_{i,j}$  est égal à  $a_i^T \cdot a_j$  où  $a_i$  désigne la  $i$ -ème colonne de  $A$ . Donc si les colonnes de  $U$  sont orthonormales on a que  $u_i^T \cdot u_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $u_i^T \cdot u_j = 1$  si  $i = j$ . Donc  $U^T U = I_n$ .

### Question 11

- a) Montrer que la matrice de rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où  $\alpha$  est un réel quelconque, est orthogonale. Calculer  $\det R$ , les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

- b) Montrer que la matrice de réflexion

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est orthogonale. Calculer  $\det U$ , les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

- c) Montrer que toute matrice  $n \times n$  de la forme  $Q = I_n - 2uu^T$ , où  $u \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur unitaire (de norme 1), est orthogonale. Ces matrices sont appelées matrices de réflexion élémentaires. A l'aide d'un raisonnement géométrique, déterminer les valeurs propres et les espaces propres correspondants.

**Solution:**



- a) On vérifie que  $RR^T = I$ , c'est-à-dire que  $R^{-1} = R^T$ , et  $R$  est une matrice orthogonale avec  $\det R = 1$ . Les valeurs propres sont  $1, \cos \alpha \pm i \sin \alpha$  et une base de vecteurs propres est donnée par exemple par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b)  $UU^T = I$ , et donc  $U$  est une matrice orthogonale,  $\det U = -1$ . Les valeurs propres sont  $1$  (avec multiplicité algébrique 2) et  $-1$ . Des vecteurs propres correspondants sont

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- c) On a

$$Q^T = I_n^T - 2(uu^T)^T = I_n - 2uu^T,$$

et donc

$$QQ^T = (I_n - 2uu^T)(I_n - 2uu^T) = I_n - 4uu^T + 4uu^Tuu^T.$$

Or

$$uu^Tuu^T = u(u^Tu)u^T = u \cdot 1 \cdot u^T = uu^T,$$

d'où  $QQ^T = I_n$ , et  $Q$  est une matrice orthogonale.

Cette matrice de réflexion élémentaire aura pour valeurs propres  $1$  et  $-1$  et si notre intuition géométrique est correcte, il y aura une droite renversée par  $Q$  et un hyperplan de dimension  $n - 1$  fixé par  $Q$ .

On a, puisque  $u^Tu = 1$ ,

$$Qu = (I_n - 2uu^T)u = u - 2uu^Tu = u - 2u = -u.$$

Donc,  $u$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $-1$ . Pour un vecteur  $v$  orthogonal à  $u$ , on a  $u \cdot v = u^Tv = 0$  et on obtient

$$Qv = (I_n - 2uu^T)v = v - 2uu^Tv = v.$$

Comme il y a  $(n - 1)$  vecteurs linéairement indépendants et orthogonaux à  $u$ ,  $Q$  possède un espace propre  $E_1$  de dimension  $(n - 1)$ .

**Remarque.** La matrice  $U$  du point précédent est un cas particulier de matrice de réflexion élémentaire, avec  $n = 3$  et

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$