

Exercices — Série 10

Mots-clés: valeurs et vecteurs propres, espaces propres, diagonalisation.

Question 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer les valeurs propres de A .
- 2) Calculer les vecteurs propres de A .
- 3) Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
- 4) (Optionnel) Calculer A^{1000} .

Question 2

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Question 3 Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.

☐ VRAI ☐ FAUX

b) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

c) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

d) Si 0 est valeur propre, alors $\text{rg}(A) < n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

e) Pour toute matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 4

On considère la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x, y) = (10x + 12y, -8x - 10y)$$

- 1) Donner la matrice A canoniquement associée à T (c'est-à-dire selon la base canoniques de $\mathbb{R}^2$).
- 2) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de A .
- 3) Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A .
- 4) (Optionnel) Calculer A^{15} .

Question 5

Soit la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - 2z, x - y - z).$$

- 1) Donnez la matrice A canoniquement associée à T (c'est-à-dire selon la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ comme à l'arrivée).
- 2) Trouvez les valeurs propres de A .
- 3) Trouvez les espaces propres de A .
- 4) Montrez que A est diagonalisable, donnez une matrice de passage S ainsi que son inverse et donnez la formule de diagonalisation.

Question 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Trouver le polynôme caractéristique de A .
- b) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de A .
- c) Montrer que A est diagonalisable.
- d) Donner une formule pour A^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.