

Exercices — Série 10

Mots-clés: valeurs et vecteurs propres, espaces propres, diagonalisation.

Question 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer les valeurs propres de A .
- 2) Calculer les vecteurs propres de A .
- 3) Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
- 4) (Optionnel) Calculer A^{1000} .

Solution:

- 1) Un simple calcul nous donne le polynôme caractéristique de A :

$$C_A(t) = (t + 1)(t - 5).$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

- 2) On cherche d'abord le(s) vecteur(s) propre(s) associé(s) à λ_1 , c'est-à-dire les vecteurs $\vec{v}$ satisfaisant $A\vec{v} = \lambda_1\vec{v}$, en résolvant

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(On *sait* que ce système doit posséder une infinité de solutions) On trouve que tous les vecteurs propres sont colinéaires à $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ On trouve de même que tous les vecteurs propres associés à λ_2 sont colinéaires à $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 3) Soit $P = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice en question. On calcule:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Appelons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ cette matrice. Il s'agit de la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A , *placées dans le même ordre que les vecteurs propres correspondants*. On a donc diagonalisé la matrice A .

- 4) Comme vu en classe, la diagonalisation permet de calculer les grandes puissances de A de manière directe. Comme $P^{-1}AP = D$, on a $A = PDP^{-1}$, et

$$\begin{aligned} A^{1000} &= PD^{1000}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 5^{1000} \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{1000} + 2 & 2 \cdot 5^{1000} - 2 \\ 5^{1000} - 1 & 2 \cdot 5^{1000} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Question 2

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution:

- A) Non. Calculons tout d'abord les valeurs propres de la matrice. Le polynôme caractéristique est donné par

$$C_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2$$

Ainsi la seule valeur propre est 0. D'autre part l'espace propre associé est donné par $E_0 := \{v \in \mathbb{R}^2 | Av = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$, et donc $\dim(E_0) = 1 < 2$. Ce qui montre que A n'est pas diagonalisable.

- B) Oui. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$. Les valeurs propres de B sont distinctes, donc une famille avec un vecteur propre pour λ_1 et un vecteur propre pour λ_2 est linéairement indépendante, et constitue une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, B est diagonalisable.

- C) Oui. Les valeurs propres de C sont 4, 5, 5 (obtenues en cherchant les racines du polynôme caractéristique). Comme $\lambda = 5$ est de multiplicité 2, il faut vérifier que la dimension de l'espace propre associé est aussi 2. On calcule:

$$C - 5I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, et la colonne 2 est nulle, d'où $\text{rg}(C - 5I_3) = 1$. Par conséquent, $\dim \text{Ker}(C - 5I_3) = 3 - 1 = 2$, et la matrice C est diagonalisable.

- D) Oui. Le polynôme caractéristique de D est

$$C_D(t) = -t^3 + 36t = -t(t - 6)(t + 6).$$

Les valeurs propres sont donc 0, -6, 6. Elles sont distinctes donc D est diagonalisable.

Remarque: le théorème spectral que l'on verra plus tard, stipule que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Question 3 Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

- a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.

☐ VRAI ☒ FAUX

- b) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

☐ VRAI ☒ FAUX

- c) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.

☐ VRAI ☒ FAUX

- d) Si 0 est valeur propre, alors $\text{rg}(A) < n$.

☒ VRAI ☐ FAUX

- e) Pour toute matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Solution:

- a) Faux. En effet la matrice identité est diagonale donc diagonalisable, et pourtant sa seule valeur propre est 1.
- b) Faux. Méthode 1: La matrice nulle est diagonalisable mais non inversible.
Méthode 2: On peut aussi proposer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale donc diagonalisable, mais non inversible.
- c) Faux (pour $n \geq 2$). En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, mais non diagonalisable, car l'espace propre associé à la valeur propre 1 (de multiplicité 2) est de dimension seulement 1.
- d) Vrai. Si 0 est valeur propre, la dimension du noyau est non nulle, et donc $\text{rg}(A) = n - \dim \text{Ker} A < n$.
- e) Vrai. A et $B = P^{-1}AP$ sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités).
Remarque: si on note $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ les vecteurs propres de B , alors les vecteurs propres de A sont $P\vec{v}_1, P\vec{v}_2, \dots$.

Question 4

On considère la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x, y) = (10x + 12y, -8x - 10y)$$

- 1) Donner la matrice A canoniquement associée à T (c'est-à-dire selon la base canoniques de $\mathbb{R}^2$).
- 2) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de A .
- 3) Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A .
- 4) (Optionnel) Calculer A^{15} .

Solution:

- 1) La matrice canoniquement associée à T est

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

- 2) Nous commençons par calculer le polynôme caractéristique de A

$$\begin{aligned} C_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 10-t & 12 \\ -8 & -10-t \end{pmatrix} \\ &= t^2 - 4 \\ &= (t-2)(t+2), \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\{-2, 2\}$. Nous avons deux valeurs propres distinctes, il suffit maintenant de trouver un vecteur propre pour chaque valeurs propres: L'équation $Av = 2v$ nous donne

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation $Av = -2v$ quant à elle implique

$$E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 3) En prenant $x = 1$ dans les deux espaces propres, on obtient la base ordonnée suivante

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right).$$

On peut vérifier que c'est bel et bien une famille libre et génératrice. Remarque: on a choisi de mettre en premier un vecteur propre associé à -2 , de sorte que dans la matrice diagonale D qui suit on met d'abord -2 puis 2 sur la diagonale.

- 4) Comme vu au cours, puisque A possède "suffisamment" de vecteurs propres, i.e. il existe une base de $\mathbb{R}^2$ composée de vecteurs propres de A . Alors nous avons

$$A = SDS^{-1},$$

où $S := (v_1 \ v_2)$ est la matrice construite en mettant deux vecteurs propres côte à côte, et D est la matrice diagonale composée par les valeurs propres de A , dans le même ordre que celui des vecteurs propres. Explicitement nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

on déduit par suite que

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 2^{15} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Question 5

Soit la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - 2z, x - y - z).$$

- 1) Donnez la matrice A canoniquement associée à T (c'est-à-dire selon la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ comme à l'arrivée).
- 2) Trouvez les valeurs propres de A .
- 3) Trouvez les espaces propres de A .
- 4) Montrez que A est diagonalisable, donnez une matrice de passage S ainsi que son inverse et donnez la formule de diagonalisation.

Solution:

- 1) La matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- 2) Les trois valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ and $\lambda_3 = 2$.
- 3) Les espaces propres de A sont engendrés respectivement par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Plus précisément, $E_1 = \{(0, t_1, t_1) \mid t_1 \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{(t_2, 0, t_2) \mid t_2 \in \mathbb{R}\}$ et $E_3 = \{(t_3, t_3, 0) \mid t_3 \in \mathbb{R}\}$.
- 4) La matrice A est de taille 3×3 et possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants, elle est donc diagonalisable.

La matrice S est donnée par les vecteurs propres de A :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme A est diagonalisable on a que $A = SDS^{-1}$, et $D = S^{-1}AS$ où

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres mises dans le même ordre que les vecteurs propres correspondants.

Question 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Trouver le polynôme caractéristique de A .
- Trouver les valeurs propres et les espaces propres de A
- Montrer que A est diagonalisable.
- Donner une formule pour A^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Solution:

a) On a $C_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = \dots = -t^2(t-3)$.

- b) Nous reprenons le même raisonnement utilisé plus haut. Les valeurs propres sont $\{0, 3\}$, la matrice est de rang 1 puisque toutes ses lignes sont générées par une seule ligne, ceci implique que $\dim(E_0) = 3 - \text{rg}(A) = 2$ et donc $\dim(E_3) = 1$. Pour trouver les espaces propres nous devons résoudre les équations suivantes

$$Av = 0 \text{ et } Av = 3v,$$

après calculs nous obtenons

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Nous avons $\dim E_0 + \dim E_3 = 2 + 1 = 3$, ce qui prouve que A est bien diagonalisable.
- Si on prend S la matrice formée par les vecteurs propres de A trouvés ci-dessus (dans l'ordre choisi) alors on a

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En prenant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les valeurs propres sont placées sur la diagonale selon l'ordre des vecteurs choisis au-dessus) on a $A = SDS^{-1}$ et donc $A^k = SD^kS^{-1}$ ou encore

$$A^k = S \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

En effectuant les calculs on obtient

$$A^k = S \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3^{k-1}A = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque: Nous aurions pu trouver ce dernier résultat bien plus directement: il suffit de remarquer que $A^2 = 3A$ ce qui donne le résultat par récurrence.