

Série 4

Mots-clés: calcul matriciel, produit de matrices, puissance d'une matrice carrée, transposée, inverse d'une matrice carrée, matrices élémentaires.

Question 1

Considérons les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent).

Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$

b) $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$

Question 2

a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T .

Question 3 Soit $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

- a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.
- b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée?

Question 4 Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces, $T_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \xrightarrow{T_{\dots}} \mathbb{R}^{\cdots} \xrightarrow{T_{\dots}} \mathbb{R}^{\cdots}$.

- a) AB , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- b) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- c) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 5

- a) Dans le plan, soit S la symétrie axiale d'axe $x = -y$. Décrire son inverse s'il existe. Quelles sont les matrices de ces applications?
- b) Même question pour H l'homothétie de rapport 3.
- c) Même question pour R_θ la rotation d'angle θ centrée en l'origine.

Question 6

a) Déterminer les matrices élémentaires 3×3 suivantes :

- E_1 , qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes;
- E_2 , qui multiplie la deuxième ligne par 8;
- E_3 , qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.

b) Les matrices E_1, E_2 et E_3 sont-elles inversibles ? Pourquoi ? Si oui, donner leur inverse et l'inverse du produit $E_1 E_2 E_3$.

c) A quelle opération élémentaire chacune de ces matrices suivantes se rapporte-t-elle ?

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 7 On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 .

- Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
- Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
- Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
- Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a, b et c.

Question 8

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Question 9

- a) Est-ce que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible? Si oui calculer son inverse.
- b) Trouver les solutions du système homogène $Ax = 0$.
- c) Trouver les solutions du système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 10 Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c la matrice A ci-dessous est-elle inversible?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

Donner l'inverse de A lorsque cela est possible.

Question 11 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Soient A, B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$.

☐ Faux

☐ Vrai

- b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi.

☐ Faux

☐ Vrai

- c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible.

☐ Faux

☐ Vrai

- d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible quel que soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

☐ Faux

☐ Vrai

Question 12

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- ☐ Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.
- ☐ Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- ☐ Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- ☐ Alors $(AB)^T = A^T B^T$.

c) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

- ☐ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si C est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $AC = BC$, alors $A = B$.