Série 3

Mots-clés: indépendance linéaire, familles de vecteurs linéairement (in)dépendantes, transformations matricielles, applications linéaires, matrice d'une application linéaire, surjectivité, injectivité, bijectivité.

Question 1 Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Question 2 Soient

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- ☐ Le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ dépend linéairement des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ pour $h = 2$.
- ☐ Pour tout $h \in \mathbb{R}$, le vecteur $\overrightarrow{v_2}$ dépend linéairement des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$.
- ☐ L'ensemble $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
- ☐ L'ensemble $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.

Question 3 Soit $h \in \mathbb{R}$ et considérons les vecteurs

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur $\vec{v_3}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ lorsque

- ☐ $h = -2$
- ☐ $h = 1$
- ☐ $h = 2$
- ☐ $h = 4$

Question 4 Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

- ☐ $b = 2$
- ☐ $b = 3$
- ☐ $b = 4$
- ☐ $b = 1$

Question 5 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v_1}), T(\vec{v_2})\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^m$.

b) Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v_1}), T(\vec{v_2})\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^m$.

c) Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ engendrent $\mathbb{R}^n$ et sont tels que $T(\vec{v_j}) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

d) Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire.

e) Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire.

Question 6 Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes, définies par les images des vecteurs de la base canonique:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} \text{ et } T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\3\\6\end{pmatrix}.$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

c) $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

Question 7 L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z\ ,\ 2x - 5y + 7z\ ,\ 3x - y - 2z\ ,\ y + 3z)$$

- ☐ est surjective mais pas injective
- ☐ n'est ni surjective ni injective
- ☐ est injective mais pas surjective
- ☐ est bijective

Question 8 Dire si les applications ci-dessous sont linéaires. Calculer la matrice associée canoniquement à chacune des applications qui sont linéaires et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Question 9 Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$$

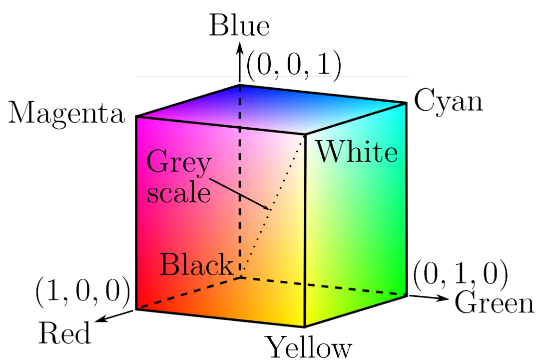
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Question 10 Considérons $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^3$, le cube de couleurs RGB[a] comme ci-dessous, avec R = Red, G = Green et B = Blue.



a) Écrire les couleurs C = Cyan, Y = Yellow et M = Magenta comme combinaisons linéaires de R, G et B.

b) Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire qui transforme rouge en cyan, vert en magenta et bleu en jaune. Écrire la matrice canoniquement associée à T.

c) Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par $f(r, b, g) = (1 - r, 1 - b, 1 - g)$.

   i) Est-ce que $T(R) = f(R)$? Et $T(G) = f(G)$? Et $T(B) = f(B)$?

   ii) Est-ce que les fonctions T et f sont égales?

[a] C'est l'ensemble $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$; chaque point est un triplet (r, g, b) où $0 \leq r, g, b \leq 1$.