# Série 2

**Mots-clés**: Espaces $\mathbb{R}^n$, équations vectorielles, combinaisons linéaires, partie engendrée par des vecteurs, équations matricielles, espace des colonnes, multiplication matrice-vecteur, systèmes (in)homogènes.

**Question 1** Soient les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i) Est-il possible d'écrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$?

ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

**Question 2**

Prenons les vecteurs $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ le vecteur $\vec{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$ ?

- ☐ $\alpha = -\frac{5}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{5}{2}$

**Question 3**

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

i) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.

ii) Écrire le système comme combinaison linéaire des colonnes de la matrice $A$.

iii) Trouver la solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.

iv) Écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

**Question 4**

a) Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$.

i) Pour quelle(s) valeur(s) de $h$ le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients $a_1$, $a_2$ des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$. Justifiez votre réponse.

**Question 5** Soit $V = \text{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte?

- [ ] $V$ contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- [ ] Le vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à $V$.
- [ ] $V$ ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.
- [ ] $V$ contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

**Question 6**
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.

☐ Vrai ☐ Faux

2) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.

☐ Faux ☐ Vrai

3) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

☐ Vrai ☐ Faux

4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

☐ Faux ☐ Vrai

5) Si $\vec{x}$ est une solution non nulle de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de $\vec{x}$ est nulle.

☐ Faux ☐ Vrai

6) Si $A$ est une matrice $m \times n$ et $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$, alors $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \vec{0}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

☐ Faux ☐ Vrai

**Question 7** Soit $V = \text{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ avec

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{v_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{v_4} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte?

- ☐ $V$ contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ $V$ contient seulement $v_1, v_2, v_3, v_4$.
- ☐ Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ n'appartient pas à $V$.
- ☐ Le vecteur nul n'appartient pas à $V$.

**Question 8** Les deux lois de Kirchhoff

1. À chaque nœud (embranchement) d'un circuit électrique, la somme des courants (intensités) qui entrent dans le nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.

2. La somme des tensions (différences de potentiels) le long de tout circuit fermé est nulle (l'augmentation du potentiel est comptée avec $+$ et la diminution avec $-$).

On rappelle que la chute de potentiel $U$ dans une résistance $R$ traversée par un courant d'intensité $I$ est donnée par la loi d'Ohm $U = RI$.
Déterminer les intensités $i_1$, $i_2$, $i_3$ dans le circuit suivant.