

# Algèbre linéaire

## Examen

### Partie commune

### Automne 2023

---

## Réponses

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

## Notation

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème composante de  $\vec{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients réels.
- Pour  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire euclidien est défini par  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .
- Pour  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , la norme euclidienne est définie par  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ .

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

possède une décomposition QR telle que

☐  $r_{12} = 0$       ☐  $r_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$       ☒  $r_{12} = \sqrt{2}$       ☐  $r_{12} = 1$

**Question 2 :** Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

deux bases de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $P$  la matrice de changement de base de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{C}$ , telle que  $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ . Alors la deuxième ligne de  $P$  est

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$       ☐  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   
☒  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$       ☐  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

**Question 3 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

☐  $\det(A) = 12\pi$       ☒  $\det(A) = -6\pi$       ☐  $\det(A) = 0$       ☐  $\det(A) = \sqrt{6}\pi$

**Question 4 :** La droite de régression linéaire pour les points  $(-3, -7), (-2, -3), (0, 3), (3, 7)$  est

☒  $y = \frac{8}{7} + \frac{16}{7}x$       ☐  $y = -\frac{8}{7} + \frac{16}{7}x$       ☐  $y = \frac{16}{7} + \frac{8}{7}x$       ☐  $y = -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}x$

**Question 5 :** Soit  $\mathcal{B} = \{2 - t, t + t^2, -1 + t^3, -1 - t + 2t^2\}$  une base de  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ . La quatrième coordonnée du polynôme  $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  est égale à

☐ 3      ☒  $-\frac{1}{7}$       ☐ -7      ☐  $\frac{1}{7}$

**Question 6 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont

☒  $-3$  et  $2$

☐  $-2$  et  $3$

☐  $-1$  et  $2$

☐  $-1$  et  $1$

**Question 7 :** Soient

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}.$$

Si  $\vec{b}$  est la projection orthogonale de  $\vec{y}$  sur  $W = \text{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ , alors

☐  $b_3 = \frac{5}{4}$

☐  $b_3 = 20$

☒  $b_3 = \frac{7}{8}$

☐  $b_3 = 14$

**Question 8 :** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$  est une solution de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  au sens des moindres carrés, alors l'erreur de l'approximation de  $\vec{b}$  par  $A\hat{x}$  est

☐  $\|\vec{b} - A\hat{x}\| = \sqrt{2}$

☐  $\|\vec{b} - A\hat{x}\| = 6$

☐  $\|\vec{b} - A\hat{x}\| = 0$

☒  $\|\vec{b} - A\hat{x}\| = \sqrt{6}$

**Question 9 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

☐  $x_1 = 3$

☐  $x_1 = 2$

☐  $x_1 = -2$

☒  $x_1 = -3$

**Question 10 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse  $B = A^{-1}$  de la matrice  $A$  est tel que

☒  $b_{33} = \frac{4}{39}$

☐  $b_{41} = \frac{1}{3}$

☐  $b_{43} = \frac{2}{3}$

☐  $b_{33} = -\frac{1}{13}$

**Question 11 :** Soit  $W$  l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille  $2 \times 2$  et soit  $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow W$  l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a & b - c \\ b - c & a + b + c \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \{1, 1 - t, t + t^2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

des bases de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  et  $W$  respectivement. La matrice  $A$  associée à  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  et la base  $\mathcal{C}$  de  $W$ , telle que  $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , est

☒  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Question 12 :** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☒ est inversible mais pas diagonalisable

☐ est inversible et diagonalisable

☐ n'est ni inversible ni diagonalisable

☐ est diagonalisable mais pas inversible

**Question 13 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Alors

☒ tous les espaces propres de  $A$  ont la même dimension

☐ la multiplicité de la valeur propre  $\lambda = 4$  est égale à 2

☐ toutes les valeurs propres de  $A$  ont la même multiplicité

☐ la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 2$  est égale à 2

**Question 14 :** Soit  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ x - y \\ -5x + 6y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Alors

☒  $T$  est injective mais pas surjective

☐  $T$  est injective et surjective

☐  $T$  n'est ni injective ni surjective

☐  $T$  est surjective mais pas injective

**Question 15 :** L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

fournit une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$  donnée par les vecteurs

☒  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 16 :** Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $\vec{u} \in W$ , alors le produit scalaire euclidien entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est égal au produit scalaire euclidien entre  $\vec{u}$  et la projection orthogonale de  $\vec{v}$  sur  $W$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 17 :** Soit  $T: \mathbb{P}_6(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$  une application linéaire. Alors il existe  $p, q \in \mathbb{P}_6(\mathbb{R})$  tels que  $p \neq q$  et  $T(p) = T(q)$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 18 :** Soit  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$  une base de  $\mathbb{R}^m$ . Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  telle que l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}_k$  possède au moins une solution pour tout  $k = 1, \dots, m$ , alors  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 19 :** Si  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  sont  $k$  vecteurs orthonormés de  $\mathbb{R}^n$ , alors le complément orthogonal de  $\text{span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - k$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 20 :** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices inversibles de taille  $n \times n$  telles que  $A + B$  n'est pas la matrice nulle, alors  $A + B$  est aussi inversible.

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 21 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  une matrice de rang 3. Si  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont des vecteurs linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^4$ , alors  $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^4$ .

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 22 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable avec valeurs propres 2, 3,  $-5$ . Alors

$$\det(A^3) = -27000.$$

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 23 :** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire.

Si  $\dim(\text{Ker } T) = \dim(V)$ , alors  $\text{Im}(T) = \{\vec{0}_W\}$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 24 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  avec  $m < n$ . Si la forme échelonnée réduite de  $A$  possède exactement  $k$  lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - k$ .

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 25 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et soit  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application linéaire définie par  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ , pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  est telle que  $A^5 = 0$ , alors  $T$  est surjective.

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 26 :** Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique, alors  
 $\det(A - A^T) = \det(A) - \det(A^T)$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 27 :** Soit  $q$  un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) : q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ .

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 28 :** Soit  $W$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$  engendré par  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ . Si  $\dim(W) = 4$ , alors il existe deux polynômes  $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$  tels que la famille  $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$  est une base de  $\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

### Troisième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 29 :** *Cette question est notée sur 3 points.*

☐<sub>0</sub> ☐<sub>1</sub> ☐<sub>2</sub> ☒<sub>3</sub>

*Réservé au correcteur*

Soient  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs linéairement indépendants.

Soit  $A$  une matrice diagonalisable de taille  $n \times n$  telle que  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  sont des vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  respectivement.

Soit  $B$  une matrice diagonalisable de taille  $n \times n$  telle que  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  sont des vecteurs propres de  $B$  associés aux valeurs propres  $\beta_1, \dots, \beta_n$  respectivement.

Montrer que la matrice  $A - B$  est diagonalisable et satisfait

$$\det(A - B) = (\alpha_1 - \beta_1) \cdots (\alpha_n - \beta_n).$$





**Question 30 :** Cette question est notée sur 3 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3

Réservé au correcteur

Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $3 \times 3$  dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 4.$$

Soit  $c$  un nombre réel et soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des vecteurs propres de la matrice  $A$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  respectivement.

Déterminer la valeur de  $c$  et construire la matrice  $A$ .

