

Série 7

Mots-clés: le déterminant

Question 1

Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 2

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Question 3 Sachant que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 2b-3c & c \\ d & 2e-3f & f \\ g & 2h-3i & i \end{vmatrix}.$$

Question 4

Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 5

Étudier, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ ci-dessous, en calculant leur déterminant.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Question 6 Calculer le déterminant de la matrice ci-dessous, en la transformant progressivement à l'aide de transformations élémentaires.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 7

Soit a un paramètre réel et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Alors A est singulière (c'est-à-dire non inversible) si

- ☐ $a \notin \{1, 3\}$
☐ $a \in \{1, -1\}$
☐ $a \in \{1, 3\}$
☐ $a \notin \{1, -1\}$

Question 8

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $\det(A) = 0$ ☐ $\det(A) = 9$
☐ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{24}$ ☐ $\det(A^T) = -24$

2) Soit A la matrice 2×2 d'une homothétie de rapport 4 dont le centre est l'origine. Alors

- ☐ $\det(A) = 4$ ☐ $\det(A) = 16$
☐ $\det(A) = 8$ ☐ $\det(A) = 0$

3) Soit T l'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ obtenue en effectuant d'abord une symétrie axiale d'axe $x = y$, puis la projection orthogonale sur l'axe $x = 0$. Soit A la matrice 2×2 de cette application linéaire.

- ☐ $\det(A) = 1$ ☐ $\det(A) = 0$
☐ $\det(A) = -2$ ☐ $\det(A) = -1$

4) Soit A une matrice de taille 5×5 . On change le signe de chaque coefficient pour obtenir la matrice B . Alors on a

- ☐ $\det(A) = -\det(B)$ ☐ $\det(B) = 0$
☐ $\det(A) = \det(B)$ ☐ $\det(A) = 5 \det(B)$

Question 9 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si B est obtenue en échangeant deux lignes de A , alors $\det(B) = \det(A)$.
- b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det(A) = 0$.
- c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A .
- d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.
- e) Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det(A) = 0$.
- f) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.
- g) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det(A) = 2$ et $\det(B) = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.
- h) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.
- i) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Question 10

- a) Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

- b) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.