

Série 6

Mots-clés: transformations linéaires injectives, surjectives, bijectives

Question 1

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Déterminer la condition nécessaire que doivent satisfaire m et n pour que

- a) T soit surjective,
- b) T soit injective,
- c) T soit bijective.

Question 2 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^m$.
- b) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^m$.
- c) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ engendrent $\mathbb{R}^n$ et sont tels que $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
- d) Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire.
- e) Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire.

Question 3 Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes, définies par les images des vecteurs de la base canonique:

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe Oz et d'angle 60° (dans le sens trigonométrique).

Question 4 L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x - 5y + 7z, 3x - y - 2z, y + 3z)$$

- ☐ n'est ni surjective ni injective
- ☐ est surjective mais pas injective
- ☐ est bijective
- ☐ est injective mais pas surjective

Question 5 Dire si les applications ci-dessous sont linéaires. Calculer la matrice associée canoniquement à chacune des applications qui sont linéaires et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives.

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Question 6 Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

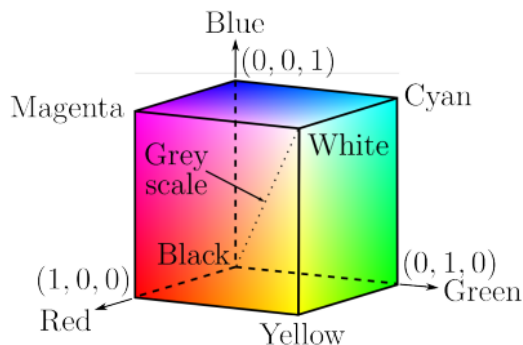
c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Question 7 Considérons $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^3$, le cube de couleurs RGB^a comme ci-dessous, avec R = Red, G = Green et B = Blue.



- a) Écrire les couleurs C = Cyan, Y = Yellow et M = Magenta comme combinaisons linéaires de R , G et B .
- b) Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire qui transforme rouge en cyan, vert en magenta et bleu en jaune. Écrire la matrice canoniquement associée à T .
- c) Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par $f(r, g, b) = (1 - r, 1 - g, 1 - b)$.
 - i) Est-ce que $T(R) = f(R)$? Et $T(G) = f(G)$? Et $T(B) = f(B)$?
 - ii) Est-ce que les fonctions T et f sont égales?

^aC'est l'ensemble $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$; chaque point est un triplet (r, g, b) où $0 \leq r, g, b \leq 1$.