

Série 5

Mots-clés: matrices inversibles, transformations linéaires, matrice canonique d'une transformation linéaire

Question 1

- a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- (i) en utilisant la formule générale de l'inverse d'une matrice 2×2 ;
 - (ii) en mettant la matrice $(A \mid I_2)$ sous forme échelonnée réduite.
- b) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ en mettant la matrice $(A \mid I_3)$ sous forme échelonnée réduite.

Question 2

- a) Est-ce que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible? Si oui calculer son inverse.
- b) Trouver les solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.
- c) Trouver les solutions du système $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 3 Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c la matrice A ci-dessous est-elle inversible?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

Donner l'inverse de A lorsque cela est possible.

Question 4 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soient A , B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$.

☐ Faux

☐ Vrai

b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi.

☐ Faux

☐ Vrai

c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible.

☐ Faux

☐ Vrai

d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible quel que soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

☐ Faux

☐ Vrai

Question 5

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- ☐ Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.
- ☐ Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- ☐ Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- ☐ Alors $(AB)^T = A^T B^T$.

c) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

- ☐ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si C est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $AC = BC$, alors $A = B$.

Question 6

On considère la population d'une région, divisée en population rurale et urbaine. On note R_n et U_n les populations rurales et urbaines à l'année n . On notera par a le taux d'exode rural annuel et par b le taux d'exode urbain (que l'on supposera constants et donnés en % de sorte que $0 \leq a, b \leq 1$).

- a) Écrivez des équations qui donnent R_{n+1} et U_{n+1} en fonction de R_n, U_n, a et b .
- b) Écrivez ces équations en une équation matricielle $A \begin{pmatrix} R_n \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$ où A est une matrice 2×2 .
- c) Prenons les valeurs $a = 0.2$ et $b = 0.1$, ainsi que $R_0 = 100'000 = U_0$. Calculez la population rurale et urbaine à la troisième année.
- d) Donnez une formule pour R_n et U_n en fonction de R_0, U_0 et A^n .

Question 7 Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

$$\text{a) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Question 8 Soit $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

- a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.
- b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée?

Question 9 Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces, $T_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \xrightarrow{T_{\cdots}} \mathbb{R}^{\cdots} \xrightarrow{T_{\cdots}} \mathbb{R}^{\cdots}$.

a) AB , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 10

- a) Dans le plan, soit S la symétrie axiale d'axe $x = -y$. Décrire son inverse s'il existe. Quelles sont les matrices de ces applications?
- b) Même question pour H l'homothétie de rapport 3.
- c) Même question pour R_θ la rotation d'angle θ centrée en l'origine.