Série 3

Mots-clés: Espaces $\mathbb{R}^n$, équations vectorielles, combinaisons linéaires, indépendance linéaire, familles de vecteurs linéairement (in)dépendantes.

Question 1

Prenons les vecteurs $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\vec{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$?

- ☐ $\alpha = -\frac{5}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{5}{2}$

Question 2

a) Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$.

i) Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$. Justifiez votre réponse.

Question 3
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.

☐ Vrai ☐ Faux

2) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.

☐ Faux ☐ Vrai

3) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

☐ Faux ☐ Vrai

4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

☐ Faux ☐ Vrai

5) Si $\vec{x}$ est une solution non nulle de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de $\vec{x}$ est nulle.

☐ Faux ☐ Vrai

6) Si A est une matrice $m \times n$ et $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$, alors $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \vec{0}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 4 Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Question 5 Soient

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- ☐ Pour tout $h \in \mathbb{R}$, le vecteur $\overrightarrow{v_2}$ dépend linéairement des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$.
- ☐ Le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ dépend linéairement des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ pour $h = 2$.
- ☐ L'ensemble $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.
- ☐ L'ensemble $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.

Question 6 Soit $h \in \mathbb{R}$ et considérons les vecteurs

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur $\vec{v_3}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ lorsque

☐ $h = 4$ ☐ $h = 2$ ☐ $h = 1$ ☐ $h = -2$

Question 7 Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

☐ $b = 2$ ☐ $b = 4$ ☐ $b = 1$ ☐ $b = 3$

Question 8
Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

i) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.

ii) Écrire le système comme combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

iii) Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.