Série 2

Mots-clés: Systèmes linéaires, matrices augmentées, algorithme de Gauss-Jordan, vecteurs, combinaison linéaires.

Question 1

(1) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

(2) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Question 2

(1) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.

(2) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{array}\right) \qquad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

Question 3

(1) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.

(2) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.

(3) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad E = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Question 4 Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Question 5

Pour chacun des deux systèmes linéaires

$$\left\{\begin{array}{ll} x + 2y & = k \\ 4x + hy & = 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} -3x + hy & = 1 \\ 6x + ky & = -3 \end{array}\right.$$

déterminer les valeurs de h et k telles que le système

(1) ne possède pas de solution,

(2) possède une solution unique,

(3) possède une infinité de solutions.

Question 6

(1) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

- ☐ Faux
- ☐ Vrai

(2) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

- ☐ Faux
- ☐ Vrai

(3) Si la matrice **augmentée** d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

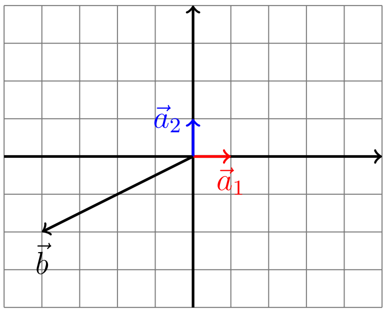
- ☐ Faux
- ☐ Vrai

(4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

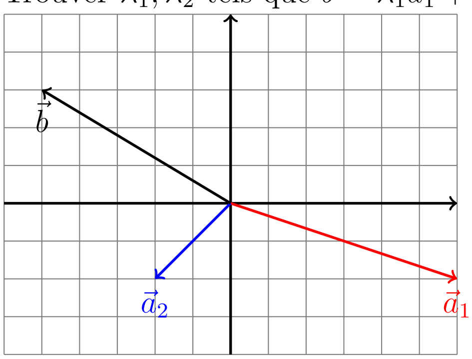
- ☐ Faux
- ☐ Vrai

Question 7 À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré =1 unité.

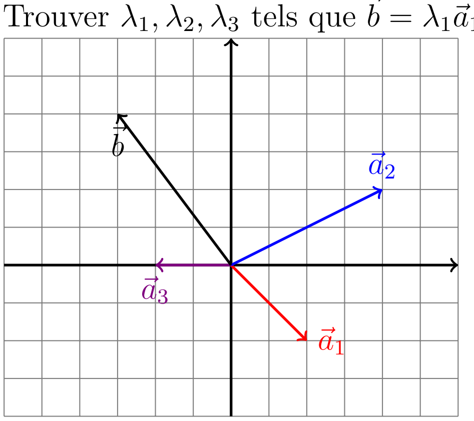
a) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$



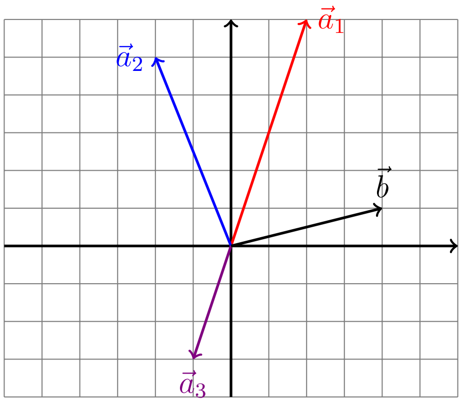
b) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$



c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$



Question 8 Dans le graphe ci-dessous, trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$.
Peut-on trouver μ_1 et μ_3 tels que $\vec{b} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_3\vec{a}_3$?



Question 9 Considérons les vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Est-il possible d'écrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$?

(2) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Question 10 Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ n'est pas compatible pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$. Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{b}$ pour lesquels $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible.