

Série 1

Mots-clés: Systèmes linéaires, matrices associées, opérations élémentaires, colonnes-pivots, algorithme de Gauss-Jordan

Question 1

Sur une balance à deux plateaux on place des billes, des cubes et des pyramides (tous les objets d'une même forme ont le même poids). La balance est équilibrée quand il y a 7 billes à gauche et 6 cubes et 2 pyramides à droite ainsi qu'avec 4 pyramides à gauche et 1 cube et 1 bille à droite.

- i) Écrire un système linéaire qui traduit ces informations et le résoudre.
- ii) Si l'on connaît le poids de l'un de ces objets peut-on en déduire le poids des deux autres?

Question 2 Trouvez tous les nombres de 3 chiffres qui augmentent de 270 quand on intervertit les deux premiers chiffres à gauche et qui diminuent de 99 quand on intervertit l'ordre des chiffres extrêmes.

Question 3

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

- i) Est-ce que le système est compatible?
- ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Question 4

En considérant les variables dans l'ordre x, y, u, v, w , quelle est la matrice aug-

mentée du système ci-contre?
$$\begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ -y + x = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases}$$

☐ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right)$

☐ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array} \right)$

☐ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array} \right)$

☐ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array} \right)$

Question 5

A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan, résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ -y + x = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases}$$

Question 6

Soit $a \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan, déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1 - a)y + (1 - a)z = a^2 \\ ax + (1 + a)y + (1 + a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

- a) n'admet aucune solution,
- b) admet une infinité de solutions,
- c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Question 7

Laquelle des colonnes de la matrice suivante *n'est pas* une colonne-pivot?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

☐ la quatrième

☐ la troisième

☐ la première

☐ la deuxième

Question 8 Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 2y + 2z &= 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z &= 1 \\ 4x + 4ay + 2z &= 1 + 2a \end{cases}$$

☐ ne possède aucune solution lorsque $a \neq \frac{1}{2}$

☐ possède une infinité de solutions lorsque $a = \frac{1}{2}$

☐ ne possède aucune solution lorsque $a = \frac{1}{2}$

☐ possède une solution unique lorsque $a = \frac{1}{2}$

Question 9

1) Un système linéaire peut avoir exactement 217 solutions.

☐ Faux

☐ Vrai

2) Deux systèmes qui ont les mêmes ensembles de solutions ont des matrices associées qui sont égales.

☐ Faux

☐ Vrai

3) Une matrice échelonnée et réduite de taille 4×5 possède 5 colonnes-pivots.

☐ Vrai

☐ Faux

4) Une matrice de taille 6×18 a au maximum 6 colonnes-pivots.

☐ Vrai

☐ Faux