

Série 13

Mots-clés: Algorithme de Gram-Schmidt, Méthode des moindres carrés, matrices orthogonales, matrices symétriques.

Rappel :

- Soit base $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ d'un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$. Alors on peut construire une base orthogonale $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$ de W de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 - \quad \vec{c}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_1, & W_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{\vec{c}_1\}, \\
 - \quad \vec{c}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_2 - \text{Proj}_{W_1}(\vec{b}_2), & W_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}, \\
 - \quad \vec{c}_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_3 - \text{Proj}_{W_2}(\vec{b}_3), & W_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}, \\
 &\vdots & & \\
 - \quad \vec{c}_i &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_i - \text{Proj}_{W_{i-1}}(\vec{b}_i), & W_i &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_i\}, \\
 &\vdots & & \\
 - \quad \vec{c}_k &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_k - \text{Proj}_{W_{k-1}}(\vec{b}_k).
 \end{aligned}$$

- **L'équation normale** d'un système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ incompatible est le système

$$A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}.$$

Sa solution minimise $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$.

Question 1 Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases des sous-espaces vectoriels $W \subseteq \mathbb{R}^n$ suivants.

a) $W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$, avec $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $W = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$, avec $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Question 2 Déterminer la solution au sens des moindres carrés du système incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix};$

Question 3

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

Calculer la droite de régression approchant au mieux ces points.

Rappel :

- Une matrice $Q \in M_{n \times n}$ est **orthogonale** si $Q^T Q = I_n$.
- Une matrice $A \in M_{n \times n}$ est **symétrique** si $A^T = A$.
- **Théorème spectral** : $A \in M_{n \times n}$ est symétrique si et seulement si elle est **diagonalisable en base orthonormale**, c'est à dire qu'on peut écrire

$$A = P D P^T, \quad \text{avec } D \in M_{n \times n} \text{ diagonale, } P \in M_{n \times n} \text{ orthogonale.}$$

Question 4

- a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale.
- b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.
- c) Montrer que si Q est une matrice orthogonale et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.
- d) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.
- e) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Qu_1, \dots, Qu_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Question 5 Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

- a) Montrer que $(Av) \cdot u = v \cdot (Au)$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$.
- b) Donner une matrice B de taille 2×2 telle que $(Bv) \cdot u \neq v \cdot (Bu)$ pour certains $u, v \in \mathbb{R}^2$.
- c) Montrer que si A est inversible, alors l'inverse de A est aussi symétrique.

Question 6 Soit $A \in M_{n \times n}$.

- a) Si $A^2 = 3I_n$, déterminer les seules valeurs propres réelles possibles de A .
- b) Si $A^2 + 2A + I_n = 0$, montrer que -1 est une valeur propre de A .

Question 7

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $P^T A P = D$, avec P une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Question 8

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	T_i [$^{\circ}C$]	U_i [V]
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.