

Série 12

Mots-clés: Produit scalaire, norme, orthogonalité, complément orthogonal, projection orthogonale.

Rappel : Soient $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel

- Le **produit scalaire** de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n.$$

- La **norme** de $\vec{v}$ est

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

- $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **orthogonaux** si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
- Le **complément orthogonal** de W est l'ensemble

$$W^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in W\}.$$

- Si $A \in M_{m \times n}$, alors $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$.

Question 1 Démontrer que si W est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$, alors $W^\perp$ est aussi un s.e.v de $\mathbb{R}^n$.

Question 2

a) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|}, \quad \frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \vec{v}.$$

- b) Calculer la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
- c) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Question 3 Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|u\| = 2$, $\|v\| = 3$ et $u \cdot v = 5$.

- Calculer le produit scalaire de $u - 2v$ et $3u + v$.
- Calculer le produit scalaire de $au + bv$ et $bu + av$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- Trouver toutes les valeurs des paramètres a et b telles que les vecteurs $au + bv$ et $bu + av$ soient orthogonaux.

Question 4 Pour tous les sous-espaces suivants, donner une base du complément orthogonal :

$$W_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$W_3 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_4 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Question 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $U = \text{Ker}(A)$. Alors $U^\perp$ est égal à

$$\square \text{Im}(A^T) \quad \square \text{Ker}(A) \quad \square \text{Im}(A) \quad \square \mathbb{R}^3$$

Rappel :

- Une famille/base de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est **orthogonale** si

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Elle est **orthonormale** si, de plus, $\|\vec{v}_i\| = 1, \quad \forall i$.

- La **projection orthogonale** de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sur un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ est le vecteur $\text{proj}_W(\vec{v}) \in W$ satisfaisant

$$\text{proj}_W(\vec{v}) \in W \quad \text{et} \quad \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v}) \in W^\perp.$$

- Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base orthogonale de W , alors on a la formule

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|^2} \vec{u}_k.$$

Question 6 Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Les vecteurs u_1 et u_2 sont orthogonaux.

☐ VRAI ☐ FAUX

b) Soit $W = \text{Span}\{u_1, u_2\}$. Calculer $\text{proj}_W(v)$.

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Calculer $v - \text{proj}_W(v)$.

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 7 Soient les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Calculer $\text{proj}_W(v)$, avec $W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$.

☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

Question 8 Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et $W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$.

a) Calculer $\text{proj}_W(v)$

b) Calculer la distance entre v et W .

Question 9 Soient $\{u_1, \dots, u_n\}$ et $\{v_1, \dots, v_n\}$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices

$$U = (u_1 \ \dots \ u_n), \ V = (v_1 \ \dots \ v_n) \in M_{n \times n}.$$

Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UV est inversible.

N.B. Une matrice $U \in M_{n \times n}$ est dite **orthogonale** si $U^T U = I_n$.

Question 10 Soit $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors

☐ A n'est pas inversible

☐ $A^T A = I_3$

☐ $\frac{A}{\sqrt{6}}$ est orthogonale

☐ A est orthogonale

Question 11 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est une base orthonormale.

☐ VRAI ☐ FAUX

- b) Un ensemble $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.

☐ VRAI ☐ FAUX

- c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général.

☐ VRAI ☐ FAUX

- d) Si x n'appartient pas au sous-espace vectoriel W , alors $x - \text{proj}_W(x)$ n'est pas nul.

☐ VRAI ☐ FAUX

- e) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

☐ VRAI ☐ FAUX

- f) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si v est dans W et dans $W^\perp$, alors $v = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12

Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, montrer les propositions suivantes :

- a) Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une famille orthonormale, alors $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.
- b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$
- d) Le théorème de Pythagore : si $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux, alors

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$