

Série 4

Mots-clés: calcul matriciel, produit de matrices, puissance d'une matrice carrée, transposée, inverse d'une matrice carrée, matrices élémentaires.

Question 1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecrire la solution générale de l'équation $A\vec{x} = 0_{\mathbb{R}^6}$.

Solution: Pour réduire la matrice qui est déjà échelonnée, il suffit d'effectuer deux opérations élémentaires $L_1 \rightarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \rightarrow L_2 - 6L_3$, ce qui donne la matrice équivalente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit ici qu'il y a trois variables principales, celles des colonnes pivot, x_1, x_3 et x_6 , et 3 variables libres (x_2, x_4 et x_5) que l'on utilise comme paramètres pour décrire la solution générale du système :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Question 2crire les solutions des systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ suivants sous la forme $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$, où $\vec{p}$ est une solution particulière du système, et $\vec{v}$ est la solution générale du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

Solution: Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution générale:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Solution: Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système est incompatible. Pas de solution!

Question 3Déterminer les valeurs des paramètres réels a, b et c pour lesquelles le système d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + u = a \\ x + 3y - 2z + u = b \\ x - 7y + 8z + u = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Solution: La matrice échelonnée-réduite du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5}(3a+2b) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5}(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+b-2a \end{array} \right).$$

Une condition nécessaire à l'existence de solutions est

$$c + b - 2a = 0.$$

Si cette condition est satisfaite, la solution générale existe et dépend de deux paramètres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3a+2b) \\ \frac{1}{5}(b-a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Question 4 Calculer $A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

Solution:

$$A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Solution:

$$A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Question 5

Considérons les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent).

Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$

b) $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$

Solution:

a) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, AC$ n'existe pas: $(2 \times 3) \times (2 \times 2),$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix},$$

CB n'existe pas: $(2 \times 2) \times (3 \times 2),$

CD n'existe pas: $(2 \times 2) \times (3 \times 1),$

$EC = \begin{pmatrix} 9 & 15 \end{pmatrix}, EA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$

b) $AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, BA^T$ n'existe pas: $(3 \times 2) \times (3 \times 2),$

$$BC^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}, C^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

BD^T n'existe pas: $(3 \times 2) \times (1 \times 3), D^T B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$

Question 6

a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T .

Solution:

- a) On a $AB = BA$ pour $k = 9$ seulement. On voit que c'est une condition nécessaire en calculant les coefficients $(1,2)$ des deux matrices. On trouve respectivement $12 - 4k$ et -24 . On s'assure ensuite que les autres coefficients sont égaux pour ce choix de k .
- b) On calcule les deux produits matriciels MN et MT . On trouve dans les deux cas $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$. Ceci donne un nouvel exemple de l'impossibilité de simplifier un produit matriciel en "divisant par M ", le problème étant bien sûr qu'on ne peut pas diviser par une matrice (en général).

Question 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si A et B sont deux matrices de taille 2×2 dont les colonnes sont désignées par $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ et $\vec{b}_1, \vec{b}_2$, alors $AB = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{pmatrix}$. □ □
- b) Soient A, B et C trois matrices de taille 3×3 . Alors $AB + AC = (B + C)A$. □ □
- c) Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. Alors $A^T + B^T = (A + B)^T$. □ □
- d) La transposée d'un produit de matrices est égale au produit de leurs transposées dans le même ordre. □ □

Solution:

- a) Faux. D'après les règles du calcul matriciel, le produit de deux matrices 2×2 est encore une matrice 2×2 or ici $\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne (de taille 1×2).
- b) Faux. La bonne formule est $AB + AC = A(B + C)$.
- c) Vrai. Plus généralement, si A et B sont deux matrices de taille $n \times n$, alors $A^T + B^T = (A + B)^T$. En effet, le coefficient (i, j) de la matrice $(A + B)^T$ est égal au coefficient (j, i) de la matrice $A + B$ qui est $a_{ji} + b_{ji}$ et qui est aussi égal au coefficient (i, j) de la matrice $A^T + B^T$.
- d) Faux. La formule correcte est $(AB)^T = B^T A^T$.
On peut trouver facilement un contre-exemple à l'assertion proposée avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule et on trouve $(AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tandis que nous avons $A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 8

- a) Déterminer les matrices élémentaires 3×3 suivantes :
- E_1 , qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes;
 - E_2 , qui multiplie la deuxième ligne par 8;
 - E_3 , qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.
- b) Les matrices E_1, E_2 et E_3 sont elles inversibles ? Pourquoi ? Si oui, donner leur inverse et l'inverse du produit $E_1 E_2 E_3$.
- c) A quelle opération élémentaire chacune de ces matrices suivantes se rapporte-t-elle?

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution:

(1) On a

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Chaque matrice est inversible car chaque opération élémentaire possède son propre inverse :

$$E_1 = E_1^{-1}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$(E_1 E_2 E_3)^{-1} = E_3^{-1} E_2^{-1} E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (3) E_1 : Multiplier à gauche par cette matrice correspond à ajouter k fois la deuxième ligne à la troisième.

E_2 : Cette matrice multiplie la deuxième ligne par k .

E_3 : Cette matrice permute les deux premières lignes.

E_4 : Cette matrice permute la première et la troisième ligne.

Question 9 On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 .

- Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
- Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
- Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
- Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a, b et c.

Solution:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Pour inverser la transformation associée à A , on considère la même transfor-

mation qui permute les lignes 2 et 4, ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à B , on considère la transformation

qui soustrait cinq fois la ligne 1 à la ligne 3, ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à C , on considère la transformation

qui divise la ligne 3 par 17, ainsi $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 10

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Solution: La matrice A est une matrice *carrée* de dimension 4×4 . Il suffit de la mettre sous forme échelonnée pour voir qu'elle a 4 pivots :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Un théorème du cours montre que A est inversible.

La matrice B est carrée et de dimension 4×4 . De plus B est déjà sous forme échelonnée, on voit donc directement qu'elle a 4 pivots et donc qu'elle est inversible.

Si on transpose la matrice C on trouve :

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

La transposée de C est donc une matrice carrée de dimension 4×4 qui a 4 pivots. Donc C^T est inversible. Donc C est inversible.

Par contre la matrice D est de dimension 4×3 et ne peut pas être inversible.