

## Série 3

**Mots-clés:** Espace  $\mathbb{R}^n$ , équations vectorielles, combinaisons linéaires, familles de vecteurs linéairement (in)dépendantes.

### Question 1

Prenons les vecteurs  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $\alpha$  le vecteur  $\vec{b}$  est-il une combinaison linéaire de  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  ?

☐  $\alpha = -\frac{5}{2}$

☒  $\alpha = -\frac{7}{2}$

☐  $\alpha = -\frac{3}{2}$  et  $\alpha = -\frac{7}{2}$

☐  $\alpha = -\frac{3}{2}$  et  $\alpha = -\frac{5}{2}$

**Solution:** Considérons le système linéaire  $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$ . En coordonnées, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = \alpha \\ x_2 = -5 \\ -2x_1 + 8x_2 = -3 \end{cases}$$

avec la matrice augmentée

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{array} \right).$$

Après des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -15 + \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 + 2\alpha \end{array} \right).$$

On voit que le système est compatible si et seulement si  $7 + 2\alpha = 0$ , i.e.  $\alpha = -\frac{7}{2}$ . Dans ce cas, la matrice ci-dessus est la forme échelonnée réduite.

(Remarque: Lorsque  $7 + 2\alpha \neq 0$ , le système est incompatible, et la forme

échelonnée réduite est  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ .) En résumé, le vecteur  $\vec{b}$  est une combi-

naison linéaire de  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  si et seulement si  $\alpha = -\frac{7}{2}$ .

**Question 2**

a) Soient les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$ .

i) Pour quelle(s) valeur(s) de  $h$  le vecteur  $\vec{w}$  peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ ?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients  $a_1, a_2$  des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ ?

b) Soient le vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$  et la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ . Est-ce que  $\vec{v}$  se trouve dans le plan de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les colonnes de  $A$ ? Justifiez votre réponse.

**Solution:**

a) Tout élément de l'espace engendré par  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  est de la forme

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des réels. Le vecteur  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$  est engendré par  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  si et seulement il existe des réels,  $a_1$  et  $a_2$  tels que l'équation vectorielle suivante soit satisfaite:

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle on effectue des opérations en essayant de ne pas traîner des fractions:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & | & 3 \\ 4 & 2 & | & 10 \\ 2 & 3 & | & h \end{pmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow \frac{L_2}{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 5 \\ 4 & 3 & | & 3 \\ 2 & 3 & | & h \end{pmatrix} \sim_{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & -7 \\ 0 & 2 & | & h - 5 \end{pmatrix} \sim_{L_3 - 2L_2} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & -7 \\ 0 & 0 & | & h + 9 \end{pmatrix} \sim_{\frac{L_1 - L_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & -7 \\ 0 & 0 & | & h + 9 \end{pmatrix}$$

D'où  $h = -9$  pour que le système soit compatible et  $a_1 = 6, a_2 = -7$ .

- b) Pour voir si le vecteur  $\vec{v}$  est dans le plan engendré par les colonnes de  $A$ , on construit une nouvelle matrice  $B = (A | \vec{v})$ , alors la forme échelonnée réduite de  $B$  montre que  $\vec{v} = -5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$  et donc  $\vec{v}$  est bien dans ce plan.

### Question 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- 1) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$  est compatible.

☒ Vrai      ☐ Faux

- 2) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$  est compatible.

☒ Faux      ☐ Vrai

- 3) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

☐ Faux      ☒ Vrai

- 4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

☒ Faux      ☐ Vrai

- 5) Si  $\vec{x}$  est une solution non nulle de  $A\vec{x} = \vec{0}$ , alors aucune composante de  $\vec{x}$  est nulle.

☒ Faux      ☐ Vrai

- 6) Si  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  sont tels que  $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$ , alors  $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \vec{0}$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

☒ Vrai      ☐ Faux

**Solution:**

- 1) Vrai. Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible! En terme de matrice augmentée, la matrice donnée peut se lire

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

- 2) Faux. Le piège est que le système est inhomogène, donc la matrice doit se lire

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

La ligne  $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 7)$  montre que le système d'équations linéaires inhomogène est incompatible.

- 3) C'est vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. On conclut alors par un résultat du cours (Théorème 4).
- 4) C'est faux. Si par exemple le pivot de la 4ème ligne se trouve dans la 5ème colonne, alors la dernière ligne d'une forme échelonnée de la matrice augmentée est  $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a)$  avec  $a \neq 0$  et donc le système est incompatible dans ce cas.
- 5) Faux. Prenons par exemple la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $\vec{x}$  est une solution non triviale de  $A\vec{x} = \vec{0}$ , mais  $\vec{x}$  a une composante nulle.
- 6) Vrai. En effet, si  $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$ , alors, par les propriétés vues en cours, on a  $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = A(\lambda\vec{v}) + A(\mu\vec{w}) = \lambda A\vec{v} + \mu A\vec{w} = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Question 4** Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils  $\mathbb{R}^3$  (questions a) et b)) ou  $\mathbb{R}^2$  (question c)) ?

a)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

**Solution:**

a) On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 & = 0 \\ x_1 & = 0 \end{cases}.$$

Ce système possède uniquement la solution triviale  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , donc les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  sont linéairement indépendants, et ils engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

b)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  ne sont pas linéairement indépendants. En effet,  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ . Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas  $\mathbb{R}^3$ .

c)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille 2 strictement inférieure au nombre 3 de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent  $\mathbb{R}^2$ .

**Remarque:** On utilise les faits suivants: Soit  $A$  de taille  $m \times n$ .

*Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^m$*

$\Leftrightarrow$  Pour tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  (tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de  $A$ ).

$\Leftrightarrow$  La forme échelonnée de la matrice augmentée  $(A|b)$  n'a pas de ligne de la forme  $(0 \ \cdots \ 0 \mid c)$  avec  $c$  non nul (car le système est compatible) ; la forme échelonnée de  $A$  n'a pas de ligne nulle  $(0 \ \cdots \ 0)$  (car  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ).

$\Leftrightarrow$  Chaque ligne a une position pivot.

**Question 5** Soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

■ Pour tout  $h \in \mathbb{R}$ , le vecteur  $\vec{v}_2$  dépend linéairement des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$ .

☐ Le vecteur  $\vec{v}_3$  dépend linéairement des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  pour  $h = 2$ .

☐ L'ensemble  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est linéairement indépendant pour  $h = -2$ .

☐ L'ensemble  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est linéairement indépendant pour  $h \neq -2$ .

**Solution:** On a

$$(\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad | \quad \vec{v}_3) \sim_{L_3+2L_1}^{L_2-3L_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & h+2 \end{array} \right)$$

La deuxième ligne montre que le système  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{v}_3$  est incompatible et donc  $\vec{v}_3$  ne peut pas se trouver dans  $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ . En fait, on voit rapidement que  $\vec{v}_2$  est un multiple de  $\vec{v}_1$ . La famille  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  est donc linéairement dépendante. À *fortiori* la famille  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est aussi linéairement dépendante. Cette observation élimine les réponses 3 et 4.

Quelle que soit la valeur de  $h$ , les vecteurs  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  sont linéairement dépendants car il n'y a pas un pivot dans chacune des colonnes de la matrice associée.

**Question 6** Soit  $h \in \mathbb{R}$  et considérons les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur  $\vec{v}_3$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  lorsque

■  $h = 4$

☐  $h = 2$

☐  $h = 1$

☐  $h = -2$

**Solution:** La bonne réponse est  $h = 4$ . On procède comme suit. On cherche la valeur de  $h$  pour laquelle il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ . Cela conduit

au système dont la matrice augmentée est  $\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & h+7 \\ 2 & 2 & 8 \\ 4 & -10 & 2h+1 \\ 7 & 1 & 25 \end{array} \right)$ . On échelonne

et on trouve:

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & h+7 \\ 2 & 2 & 8 \\ 4 & -10 & 2h+1 \\ 7 & 1 & 25 \end{array} \right) & \xrightarrow{\frac{L_2}{2} \leftrightarrow L_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & h+7 \\ 4 & -10 & 2h+1 \\ 7 & 1 & 25 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2-3L_1 \\ L_3-4L_1 \\ L_4-7L_1}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & h-5 \\ 0 & -14 & 2h-15 \\ 0 & -6 & -3 \end{array} \right) \\
& \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & h-5 \\ 0 & -14 & 2h-15 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2+L_4 \\ L_3+7L_4}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & h-4 \\ 0 & 0 & 2h-8 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
& \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & h-4 \\ 0 & 0 & 2h-8 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Cette dernière matrice admet exactement 2 pivots si et seulement si les lignes 2 et 3 sont nulles, ce qui est le cas si et seulement si  $h = 4$ .

**Question 7** Soit  $b \in \mathbb{R}$ . Alors les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

☐  $b = 2$

☒  $b = 4$

☐  $b = 1$

☐  $b = 3$

**Solution:** La bonne réponse est  $b = 4$ . Pour le voir on échelonne la matrice formée par ces vecteurs:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & b-1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2+3L_3} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & b-4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

De là on conclut que pour que les vecteurs soient linéairement dépendants il faut que  $b = 4$  (afin d'avoir strictement moins de 3 pivots).

### Question 8

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

- Écrire le système sous forme matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$ .
- Écrire le système comme combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $A$ .
- Trouver l'ensemble des solutions de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

**Solution:**

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

iii) La matrice augmentée est  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{array} \right)$ , et sa forme échelonnée réduite est  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ . La variable  $x_3$  est libre, on peut donc écrire l'ensemble des solutions comme

$$\begin{cases} x_1 &= -5 - 4x_3 \\ x_2 &= 3 + 3x_3 \\ x_3 &\text{ libre} \end{cases}$$

En posant  $x_3 = t \in \mathbb{R}$ , on en déduit que les solutions  $(s_1, s_2, s_3)$  sont données par

$$s_3 = t, t \in \mathbb{R}, s_1 = -5 - 4t, s_2 = 3 + 3t.$$

D'où l'ensemble des solutions:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$