# Série 2

**Mots-clés**: Systèmes linéaires, matrices augmentées, algorithme de Gauss-Jordan, vecteurs, combinaison linéaires.

## Question 1

(1) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

(2) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$

**Solution:**

a) Matrice augmentée: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$,

Forme échelonnée réduite: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$, Solution: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

b) Matrice augmentée: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right)$,

Forme échelonnée réduite: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, Solution: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

c) Matrice augmentée: $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right)$,

Forme échelonnée réduite: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$, Solution: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

d) Matrice augmentée: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$,

Forme échelonnée réduite: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, Solution: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

**Question 2**

(1) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.

(2) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{array}\right) \qquad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

**Solution:** $A$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, infinité de solutions ($x_3$ est une variable libre),

$B$: $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$, pas de solution,

$C$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, pas de solution.

**Question 3**

(1) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.

(2) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.

(3) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad E = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

**Solution:**

A) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales: $x_1, x_2, x_3$. Variables libres: aucune. Solution unique.

B) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales: $x_1, x_2$. Variable libre: $x_3$. Infinité de solutions.

C) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales: $x_1, x_2$. Variable libre: $x_3$. Pas de solution.

D) forme échelonnée, pas une forme échelonnée réduite. Variables principales: $x_2, x_3$. Variable libre: $x_1$. Infinité de solutions.

E) pas une forme échelonnée. Infinité de solutions.

**Question 4** Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

**Solution:**

a) La matrice des coefficients est carrée (autant d'équations que d'inconnues) et on peut remarquer que $L_1 = L_2 + L_3$. Il s'agit d'une relation de dépendance linéaire sur les lignes. On obtiendra une ligne de zéros dans la matrice, et il n'y aura pas trois pivots. On a alors au moins une variable libre et donc une infinité de solutions (non-triviales).

On peut aussi résoudre le système. La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{17}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sa solution générale est

$$\begin{cases} x_1 & = & -\frac{17}{8}x_3 \\ x_2 & = & \frac{3}{4}x_3 \end{cases}.$$

Il existe une infinité de solutions non triviales (prendre $x_3 \neq 0$).

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Solution triviale ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

c) Le système a moins d'équations (deux) que d'inconnues (trois), il ne peut pas y avoir trois pivots. Le système est compatible (on échelonne pour le voir), donc il existe une infinité de solutions.

**Question 5**

Pour chacun des deux systèmes linéaires

$$\begin{cases} x + 2y & = k \\ 4x + hy & = 5 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -3x + hy & = 1 \\ 6x + ky & = -3 \end{cases}$$

déterminer les valeurs de $h$ et $k$ telles que le système

(1) ne possède pas de solution,

(2) possède une solution unique,

(3) possède une infinité de solutions.

**Solution:** Pour le premier système, la matrice augmentée est

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & k \\ 4 & h & 5 \end{array} \sim_{L_2 - 4L_1} \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & k \\ 0 & h-8 & 5-4k \end{array}$$

(1) si $h = 8$ et $k \neq \frac{5}{4}$, il n'y a pas de solution,

(2) si $h \neq 8$, il y a une solution unique,

(3) si $h = 8$ et $k = \frac{5}{4}$, il y a une infinité de solutions.

Pour le second système on obtient

$$\left.\begin{array}{rr|r} -3 & h & -1 \\ 6 & k & -3 \end{array}\right. \sim_{2L_2+L_1} \left.\begin{array}{rr|r} -3 & h & 1 \\ 0 & k+2h & -1 \end{array}\right.$$

Ainsi

(1) si $k = -2h$, il n'y a pas de solution,

(2) si $k \neq -2h$, il y a une solution unique,

(3) Il n'existe pas de $h$ et de$k$ tels qu'il y'ait une infinité de solutions.

### Question 6

(1) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

- ☐ Faux
- ■ Vrai

(2) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

- ☐ Faux
- ■ Vrai

(3) Si la matrice **augmentée** d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

- ■ Faux
- ☐ Vrai

(4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

- ■ Faux
- ☐ Vrai

**Solution:**

(1) C'est vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. On conclut alors par un résultat du cours.

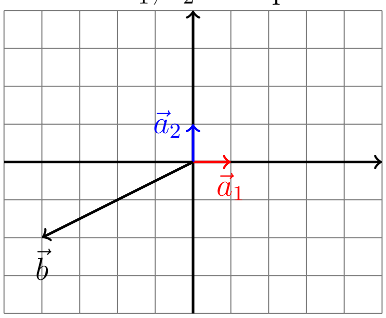
(2) C'est vrai et c'est dit ainsi dans le cours.

(3) C'est faux. Il suffit que la dernière ligne soit de la forme (0 0 0 0 7) par exemple pour que le système soit incompatible.

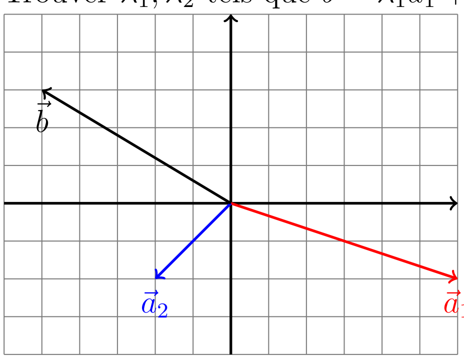
(4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues est constituée de cinq colonnes, celles des inconnues et celle des termes inhomogènes. Il n'est donc pas possible qu'il y ait un pivot dans chaque colonne.

**Question 7** À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré =1 unité.

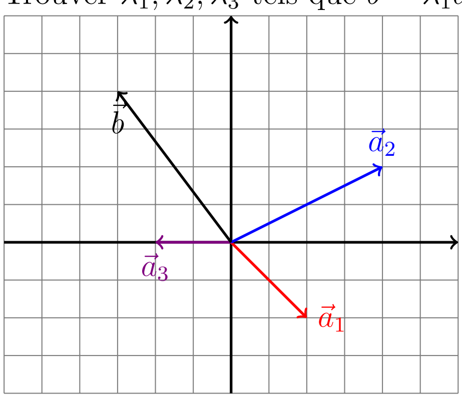
a) Trouver $\lambda_1, \lambda_2$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$




b) Trouver $\lambda_1, \lambda_2$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$




c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$




**Solution:**

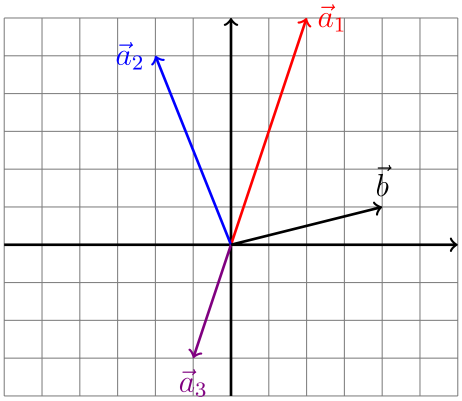
a) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$

b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$

c) Il y a une infinité de solutions. En voici une: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = -1/2$

Une autre méthode est d'écrire les systèmes d'équations qui correspondent aux équations vectorielles à résoudre.

**Question 8** Dans le graphe ci-dessous, trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$.
Peut-on trouver $\mu_1$ et $\mu_3$ tels que $\vec{b} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_3\vec{a}_3$?




**Solution:** Il y a une infinité de solutions. En voici deux: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = -2$ ou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 0$.
Non on ne peut pas trouver de $\mu_1$ et $\mu_3$ tels que $\vec{b}$ soit une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_3$, car ces deux vecteurs sont colinéaires.

**Question 9** Considérons les vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Est-il possible d'écrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$?

(2) Donner une interprétation géométrique du résultat.

**Solution:**

(1) Non. Considérons l'équation linéaire $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$, d'inconnues $x_1, x_2$. Le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 &= -3 \\ -2x_1 - 13x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$$

avec pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On peut voir que ce système ne possède pas de solution.

(2) Cela signifie que le vecteur $\vec{b}$ n'appartient pas au plan formé des vecteurs $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$, avec $x_1$ et $x_2$ réels.

**Question 10** Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ n'est pas compatible pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$. Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{b}$ pour lesquels $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible.

**Solution:** Puisque la deuxième ligne de la matrice $A$ vaut $-2$ fois la première, il faut et il suffit que le deuxième coefficient de $\overrightarrow{b}$ vérifie aussi cette propriété: $b_2 = -2b_1$. Ainsi pour $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le système n'a pas de solution.