

Série 12

Mots-clés: Produit scalaire, norme, orthogonalité, complément orthogonal, projection orthogonale.

Rappel : Soient $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel

- Le **produit scalaire** de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n.$$

- La **norme** de $\vec{v}$ est

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

- $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **orthogonaux** si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
- Le **complément orthogonal** de W est l'ensemble

$$W^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in W\}.$$

- Si $A \in M_{m \times n}$, alors $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$.

Question 1 Démontrer que si W est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$, alors $W^\perp$ est aussi un s.e.v de $\mathbb{R}^n$.

Solution: Nous vérifions les deux propriétés de la caractérisation simplifiée des sous-espaces vectoriels.

- (1) Le vecteur nul appartient à $W^\perp$, car il est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ ($\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$).

- (2) Soient $\vec{u}, \vec{v} \in W^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\vec{w} \in W$,

$$(\vec{u} + \lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) = 0 + \lambda 0 = 0.$$

Donc $\vec{u} + \lambda \vec{v} \in W^\perp$.

Question 2

a) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|}, \quad \frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \vec{v}.$$

b) Calculer la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

c) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Solution:

$$\text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} = 7, \vec{v} \cdot \vec{w} = 10, \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} = \frac{39}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{1}{61} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{39}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{17}, \|\vec{u} - \vec{w}\| = 3.$$

c) Notation: pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on pose $\tilde{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ le vecteur unitaire correspondant.

$$\text{Alors } \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{w} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Question 3 Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|u\| = 2$, $\|v\| = 3$ et $u \cdot v = 5$.

a) Calculer le produit scalaire de $u - 2v$ et $3u + v$.

b) Calculer le produit scalaire de $au + bv$ et $bu + av$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Trouver toutes les valeurs des paramètres a et b telles que les vecteurs $au + bv$ et $bu + av$ soient orthogonaux.

Solution:

a) On calcule en utilisant la distributivité du produit scalaire par rapport à la somme de vecteurs: $(u - 2v) \cdot (3u + v) = 3u \cdot u - 5u \cdot v - 2v \cdot v = 3\|u\|^2 - 5u \cdot v - 2\|v\|^2 = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 5 - 2 \cdot 9 = -31$.

$$\text{b) } (au + bv) \cdot (bu + av) = ab(u \cdot u) + (a^2 + b^2)(u \cdot v) + ab(v \cdot v) = 13ab + 5a^2 + 5b^2$$

- c) Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Donc, les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si a, b vérifient $5a^2 + 5b^2 + 13ab = 0$. On pose alors $a = t$ et on résout l'équation du second degré $5b^2 + 13tb + 5t^2 = 0$ pour trouver $b = \frac{-13t \pm \sqrt{69t^2}}{10}$.

Question 4 Pour tous les sous-espaces suivants, donner une base du complément orthogonal :

$$W_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$W_3 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_4 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solution:

- 1) Par définition,

$$W_1^\perp = \left\{ w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3a + 2b + c = 0 \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

- 2) Par la formule du cours, $W_2^\perp = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sa forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \implies W_2^\perp = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

- 3) Par un résultat du cours, nous avons que

$$\dim(W_3^\perp) = 3 - \dim(W_3) = 0.$$

Ainsi, $W_3^\perp = \{\vec{0}\}$.

- 4) Par la formule du cours, $W_4^\perp = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Sa forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \implies W_4^\perp = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Question 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $U = \text{Ker}(A)$. Alors $U^\perp$ est égal à

☒ $\text{Im}(A^T)$ ☐ $\text{Ker}(A)$ ☐ $\text{Im}(A)$ ☐ $\mathbb{R}^3$

Solution: Nous avons vu en cours que $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$, donc $\text{Ker}(A)^\perp = \text{Im}(A^T)$.

Rappel :

- Une famille/base de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est **orthogonale** si

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0, \forall i \neq j.$$

Elle est **orthonormale** si, de plus, $\|\vec{v}_i\| = 1, \forall i$.

- La **projection orthogonale** de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sur un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ est le vecteur $\text{proj}_W(v) \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$\text{proj}_W(\vec{v}) \in W \quad \text{et} \quad \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v}) \in W^\perp.$$

- Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base orthogonale de W , alors on a la formule

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|^2} \vec{u}_k.$$

Question 6 Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Les vecteurs u_1 et u_2 sont orthogonaux.

☒ VRAI ☐ FAUX

b) Soit $W = \text{Span}\{u_1, u_2\}$. Calculer $\text{proj}_W(v)$.

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Calculer $v - \text{proj}_W(v)$.

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution:

a) Un calcul direct donne $u_1 \cdot u_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$.

b) Comme u_1 et u_2 sont orthogonaux on peut utiliser la formule vue en cours:

$$\text{proj}_W(v) = \frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{6}{3} u_1 + \frac{-3}{2} u_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Suite au calcul dans b), $z = v - \text{proj}_W(v) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 7 Soient les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $\text{proj}_W(v)$, avec $W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$.

$$\square \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Solution: Attention, ici w_1 et w_2 ne sont pas orthogonaux ($w_1 \cdot w_2 \neq 0$), on ne peut donc pas utiliser la formule comme à l'exercice ci-dessus. On utilise donc la définition de projection orthogonale: La projection orthogonale $\text{proj}_W(v)$ est le seul vecteur w vérifiant $w \in W$ et $v - w \in W^\perp$:

$$\begin{cases} (w - v) \cdot w_1 = 0 \\ (w - v) \cdot w_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha w_1 \cdot w_1 + \beta w_2 \cdot w_1 = v \cdot w_1 \\ \alpha w_1 \cdot w_2 + \beta w_2 \cdot w_2 = v \cdot w_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases}.$$

La solution est $\alpha = -1/2$, $\beta = 4/3$. Par conséquent,

$$w = -\frac{1}{2} w_1 + \frac{4}{3} w_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Question 8 Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et $W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$.

- a) Calculer $\text{proj}_W(v)$
- b) Calculer la distance entre v et W .

Solution:

- a) On remarque que les vecteurs w_1 et w_2 sont orthogonaux. On peut ainsi facilement calculer la projection orthogonale grâce à la formule $\text{proj}_W(v) = \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2$ ce qui nous fournit directement les coefficients α et β . On

trouve $\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$ et donc $\text{proj}_W(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

- b) La distance entre v et W est donnée par $\|v - \text{proj}_W(v)\| = \sqrt{\frac{35}{2}}$.

Question 9 Soient $\{u_1, \dots, u_n\}$ et $\{v_1, \dots, v_n\}$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices

$$U = (u_1 \ \dots \ u_n), \quad V = (v_1 \ \dots \ v_n) \in M_{n \times n}.$$

Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UV est inversible.

N.B. Une matrice $U \in M_{n \times n}$ est dite **orthogonale** si $U^T U = I_n$.

Solution:

$$U^T U = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) = \begin{pmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \dots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \dots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \dots & u_n^T u_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Comme $v_1, \dots, v_n$ vérifient les mêmes hypothèses, on a également $V^T V = I_n$.
 UV est inversible car $V^T U^T UV = V^T V = I_n$, d'où $(UV)^{-1} = V^T U^T$.

Question 10 Soit $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors

☐ A n'est pas inversible

☐ $A^T A = I_3$

☒ $\frac{A}{\sqrt{6}}$ est orthogonale

☐ A est orthogonale

Solution: Les colonnes de A sont orthogonales mais pas orthonormées. Un simple calcul donne $A^T A = 6I_3$, donc $\frac{A}{\sqrt{6}}$ est orthogonale.

Question 11 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est une base orthonormale.

☐ VRAI ☒ FAUX

- b) Un ensemble $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.

☒ VRAI ☐ FAUX

- c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général.

☒ VRAI ☐ FAUX

- d) Si x n'appartient pas au sous-espace vectoriel W , alors $x - \text{proj}_W(x)$ n'est pas nul.

☒ VRAI ☐ FAUX

- e) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

☐ VRAI ☒ FAUX

- f) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si v est dans W et dans $W^\perp$, alors $v = 0$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Solution:

- a) Faux. Pour que des vecteurs forment une base orthonormale il faut qu'ils soient de norme 1 (en plus d'être orthogonaux deux à deux).
- b) Vrai. Deux vecteurs orthogonaux non nuls sont linéairement indépendants.
- c) Vrai. Dans une base orthonormale $(b_1, \dots, b_n)$ les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et non nuls (car ils ont une norme égale à 1), donc linéairement indépendants. Il s'agit donc aussi d'une base orthogonale.

- d) Vrai. Si $x - \text{proj}_W(x) = 0$ cela signifie que $x = \text{proj}_W(x)$ et donc $x \in W$.
- e) Faux. Un ensemble orthonormal possède des vecteurs 2 à 2 orthogonaux et non nuls (car de norme 1). Ces vecteurs sont donc linéairement indépendants!
- f) Vrai. Si $w \in W \cap W^\perp$ alors $w \cdot w = 0$ et donc $w = 0$.

Question 12

Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, montrer les propositions suivantes :

- a) Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une famille orthonormale, alors $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.
- b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$
- d) Le théorème de Pythagore : si $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux, alors

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

Solution:

- a) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 1 - 0 + 1 = 2$,
donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.
- b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$
 $\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$
 $\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$.
Remarque: l'égalité c) s'appelle "identité du parallélogramme".

- d) Si $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux, alors par (b),

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2,$$

et par (c), on a directement le résultat.