Série 10

Mots-clés: Théorème du rang, matrice représentative d'une application linéaire.

Rappel : Soit $T : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

- Le **rang** de T est le nombre $\mathrm{rg}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.
  Si T est une application matricielle, alors

$$\text{rang} \;=\; \text{nombre de pivots de sa matrice}$$

- Le **théorème du rang** affirme que

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(V).$$

  Avec des matrices, ceci signifie que

$$\text{dimension de l'image} \;=\; \text{nombre de colonnes-pivots},$$

$$\text{dimension du noyau} \;=\; \text{nombre de colonnes } \textbf{sans} \text{ pivots}.$$

Question 1 Soit V un espace vectoriel et une base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n\}$. Démontrer que l'application coordonnées

$$[.]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \vec{v} \mapsto [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

est linéaire.

Solution: Soient $\vec{v}, \vec{w} \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors il existe des coefficients $v_i, w_i \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + \cdots + v_n\vec{b}_n \qquad \text{et} \qquad \vec{w} = w_1\vec{b}_1 + \cdots + w_n\vec{b}_n.$$

Nous avons donc

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = (\lambda v_1 + \mu w_1)\vec{b}_1 + \cdots + (\lambda v_n + \mu w_n)\vec{b}_n.$$

Par définition des coordonnées et par linéarité des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^n$,

$$[\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}]_{\mathcal{B}} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda v_1 + \mu w_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n + \mu w_n \end{pmatrix} \;=\; \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \;=\; \lambda[\vec{v}]_{\mathcal{B}} + \mu[\vec{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Question 2 Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i, pour $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes

- ☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.
- ☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b.
- ■ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.
- ☐ pour toutes valeurs de a, b.

Solution: La bonne réponse est: lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.
Il y a deux manières de résoudre cet exercice. Soit on écrit un système $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \delta A_4 = 0$, où 0 est la matrice nulle, et on trouve que pour forcer $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ il faut avoir $a \neq 0$ et $b \neq 3$. Soit on considère la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ des matrices 2×2 et on écrit chacune des matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, dans cette base (sous forme de vecteurs). On peut ensuite échelonner le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

pour trouver sous quelles valeurs de a et b le système contient 4 pivots.

Question 3 Soit $W \subset \mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$.
On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.
- ■ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

Solution: La bonne réponse est: On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont proportionnels, ils sont donc linéairement dépendants et ne peuvent être complétés en une base. Par contre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont linéairement indépendants, ils peuvent donc être complétées en une base de W. Le sous-espace W est donné par une équation à six inconnues. Cinq d'entre elles sont des inconnues secondaires qui jouent le rôle de paramètres, la dimension de W est donc 5.

Question 4 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que les matrices A et B ont la même forme échelonnée réduite. (**NB:** on dit alors que A et B sont **ligne-équivalentes**)

b) Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\dim(\mathrm{Ker} A)$.

c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^T)$, ainsi que du sous-espace $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Solution:

a) La matrice échelonnée réduite de ces deux matrices est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) En analysant la matrice échelonnée réduite, on remarque alors que :

- Il y a deux pivots, ce qui donne $\mathrm{rg}(A) = 2$ et une base de $\mathrm{Im}(A)$ peut être formée par les deux premières colonnes de A qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée.
- Par le Théorème du rang on trouve $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 2$.

c) Trouvons les bases.

- Base de $\mathrm{Ker}(A)$: L'équation $A\vec{x} = 0$ est équivalente à $B\vec{x} = 0$; une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est donnée par : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et donc $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2$, ce qui confirme le calcul effectué ci-dessus.
- Base de Lgn(A): Une base du sous-espace engendré par les lignes de A est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée B:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

- Base de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^T)$: On a vu plus haut que les deux premières colonnes de A forment une base de $\mathrm{Im}(A)$. Enfin $\mathrm{Im}(A)$ coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A^T. Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de A^T est de dimension $3-2=1$. On trouve que $\mathrm{Ker}(A^T)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 5 Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k \in V$. Alors

- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V = k$.
- ■ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.

Solution: La réponse est: Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$. En effet, si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, on peut *compléter* cette famille en une base et cette base aura donc au moins k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au minimum ($\dim V \geq k$). Alors que, si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre V, on peut *extraire* une base de cette famille et cette base aura donc au plus k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au maximum ($\dim V \leq k$).

Question 6 Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que:

- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 3$ et $\mathrm{rg}(A) = 4$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 4$
- ■ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 5$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$

Solution: La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'image de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace de dimension ≤ 3. Le Théorème du rang affirme que

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = 7 - \mathrm{rg}(A) \geq 7 - 3 = 4$$

ce qui élimine deux affirmations (celles qui disent que $\dim \mathrm{Ker}(A) \leq 3$). Intuitivement c'est clair: il faut "éliminer" au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans $\mathbb{R}^3$. Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rg}(A) = 7$, ce qui élimine aussi l'affirmation $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 2$ car, dans ce cas, la somme ne peut pas être égale à 7.

Question 7 Soit A une matrice inversible de taille 5×5. Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est vide
- ☐ Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$
- ■ Les lignes de A sont linéairement indépendantes
- ☐ Le rang de A est strictement plus petit que 5

Solution: La forme échelonnée d'une matrice inversible a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi les colonnes, et les lignes également, forment une base de $\mathbb{R}^5$. Donc en particulier elles engendrent $\mathbb{R}^5$ et elles sont linéairement indépendantes. L'application linéaire que représente A est bijective, et donc le noyau est *nul* (pas vide!), et l'image de A est $\mathbb{R}^5$ tout entier, donc le rang de A vaut 5.

Question 8 Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Alors

- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$ et $\mathrm{rg}(T) = 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$ et $\mathrm{rg}(T) = 1$
- ☐ T n'est pas linéaire
- ■ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 2$ et $\mathrm{rg}(T) = 1$

Solution: L'application T est linéaire et, plus explicitement, on a $T(a+bt+ct^2) = 3a + 2c$. En particulier, T n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de T est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

Question 9 Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Une base du noyau de T est donnée par $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Solution: Par la question précédente, la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que $-2 + t + 3t^2$ et $2 - 3t^2$ sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de T. Ils forment donc une base du noyau.

Rappel. Soit $T : V \longrightarrow W$ et deux bases

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \subset V, \quad \mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\} \subset W.$$

Alors **la matrice représentative de T de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** est définie par

$$M = \left([T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{C}} \right).$$

Question 10

Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire définie par $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$ et les bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

a) Dans $\mathbb{R}^3$, calculer la matrice de changement de bases de la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ vers $\mathcal{C}$.

Rappel de la formule de l'inverse:

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left(\vec{c}_1 \dots \vec{c}_n\right)^{-1} \left(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n\right).$$

b) En déduire la matrice de T de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

Solution:

a) Par les formules vues en classe,

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{can}} = (\mathcal{C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) On commence par calculer les images par T des vecteurs de la base $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$:

$$T(\vec{b_1}) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(\vec{b_2}) = T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs dans la base $\mathcal{C}$ avec la matrice de changement de bases calculée en (a) :

$$[T(\vec{b_1})]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad [T(\vec{b_2})]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$B = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Question 11 On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

a) Donner la matrice M de T dans les bases $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ et $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$. La mettre sous forme échelonnée réduite.

b) Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M)$ respectivement.

c) En déduire une base de $\mathrm{Im}(T)$ et $\mathrm{Ker}(T)$.

d) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en b).

e) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en b).

Solution:

a) Par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ et $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$, la matrice associée à l'application linéaire T est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice ci-dessus admet 2 pivots dans les colonnes 1 et 3. On en déduit que

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le noyau se calcule en résolvant le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \implies \mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Nous obtenons les bases de l'image et du noyau de T en prennant utilisant les vecteurs-coordonnées trouvées ci-dessus dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement :

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \implies \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}\{1 + t,\ 1 + t^2\},$$

$$\text{Ker}(M) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{Ker}(T) = \text{Span}\{1-t, t^2-t^3\}.$$

d) Le polynôme $7+5t+2t^2$ est bien dans l'image de T puisque - par exemple - $T(5+2t^2) = 7+5t+2t^2$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Im}}$ sont

$$[7+5t+2t^2]_{\mathcal{B}_{\text{Im}}} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix},$$

puisque $7+5t+2t^2 = 5(1+t)+2(1+t^2)$.

e) On a bien $2-2t-5t^2+5t^3 \in \text{Ker}(T)$ puisque $T(2-2t-5t^2+5t^3) = 0$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Ker}}$ sont

$$[2-2t-5t^2+5t^3]_{\mathcal{B}_{\text{Ker}}} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix},$$

puisque $2-2t-5t^2+5t^3 = 2(1-t)-5(t^2-t^3)$.

Question 12 Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ et une base $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^4$ définie par

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_4\\x_1+x_4\end{pmatrix}$$

a) Dans $\mathbb{R}^4$, calculer la matrice de changement de bases de la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ vers $\mathcal{B}$.

b) Donner la matrice de T dans la base (de départ et d'arrivée)

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Solution:

a) Par les formules vues en classe

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{can}} = (\mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&-1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

b) Nous cherchons la matrice

$$M = \left([T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{b}_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{b}_4)]_{\mathcal{B}}\right)$$

Commençons par calculer l'image des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$T(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ T(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\ T(\vec{b}_3) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ T(\vec{b}_4) = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Nous pouvons calculer les coordonnées de ces images dans $\mathcal{B}$ avec la matrice de changement de base calculée en (a) :

$$[T(\vec{b}_i)]_{\mathcal{B}} \ = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} [T(\vec{b}_i)]_{\mathcal{B}_{can}}.$$

Nous en déduisons alors

$$M = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Question 13 Soit $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow M_{2\times 2}$ définie par

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix}a & b\\ -b & c\end{pmatrix}$$

et des bases

$$\mathcal{B} = \{1 - t, t + t^2, t^2\}, \quad \mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Calculer la matrice de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Solution: Nous calculons les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ par T :

$$T(1-t) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ T(t+t^2) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ T(t^2) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Nous pouvons voir que leur expression dans $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_3\}$ sont

$$T(1-t) = C_1 + \frac{1}{2}C_3,\ T(t+t^2) = -C_1 + C_2 - \frac{1}{2}C_3,\ T(t^2) = -C_1 + C_2,$$

d'où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativement, si on ne "voit pas" les coordonnées des images, nous pouvons passer par une matrice de changement de base de la base canonique de $M_{2\times 2}$ vers $\mathcal{C}$:

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle nous donne alors

$$[T(1-t)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{can}}[T(1-t)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[T(t+t^2)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{can}}[T(t+t^2)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[T(t^2)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{can}}[T(t^2)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$