

Série Vrai-Faux et QCM

Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira parfois a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$. On fixe un corps K .

On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n \times n}(K)$.

On utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B , c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B .

Exercice 1. Soit K un corps et soit V un K -espace vectoriel de dimension finie. Soient X et Y deux sous-espaces vectoriels de V , avec bases $B_X = \{x_1, \dots, x_t\}$ et $B_Y = \{y_1, \dots, y_s\}$, respectivement.

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. Si $\dim X + \dim Y = \dim V$, alors, $V = X \oplus Y$.
2. $X + Y$ est une somme directe et $V = X \oplus Y$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_t, y_1, \dots, y_s)$ est une base de V .
3. Il existe une base C de V avec $B_X \cup B_Y \subset C$.

Exercice 2. Soit K un corps. Soient $A \in M_{p \times n}(K)$ et $B \in M_{p \times 1}(K)$. Soit $AX = B$ un système d'équations linéaires avec inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. Si $p = n$ et A est inversible, alors, le système possède au moins une solution.
2. Si $p = n$ et A est non inversible, alors, le système possède une infinité de solutions.
3. Si $\text{rang}(A) < n$, le système possède plus qu'une solution.
4. Si $B = 0$, le système possède une solution unique si et seulement si $\text{rang}(A) = n$.

Exercice 3. Questions à choix multiples. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

(1) Soit la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$. On suppose que $\det(A) = d$. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 2(a_{11} + a_{12}) + a_{21} + a_{22} & 2a_{12} + a_{22} & 2(a_{13} - a_{12}) + a_{23} - a_{22} \\ a_{21} + a_{22} & a_{22} & a_{23} - a_{22} \\ a_{31} + a_{32} & a_{32} & a_{33} - a_{32} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Alors

- ☐ $\det(B) = 2d.$
- ☐ $\det(B) = d.$
- ☐ $\det(B) = -2d.$
- ☐ $\det(B) = \frac{1}{2}d.$
- ☐ $\det(B) = -\frac{1}{2}d.$

(2) Soit $S = \{(6, 3, 5, 4), (4, 2, 1, 5), (3, 5, -1, -5)\}$ des vecteurs du $\mathbb{F}_7$ -espace vectoriel $(\mathbb{F}_7)^4$. Alors,

- ☐ $\dim \text{Vect}(S) = 1$.
- ☐ S est une partie libre et on peut le compléter avec le vecteur $(1, 0, 0, 1)$ pour former une base de $(\mathbb{F}_7)^4$.
- ☐ $\dim \text{Vect}(S) = 2$, et $\{(6, 3, 5, 4), (4, 2, 1, 5)\}$ est une base de $\text{Vect}(S)$.
- ☐ $\dim \text{Vect}(S) = 2$, et $\{(6, 3, 5, 4), (3, 5, -1, -5)\}$ est une base de $\text{Vect}(S)$.

Exercice 4.

Soit $b \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère le système suivant d'équations linéaires à coefficients réels.

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & b \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & b \end{array}$$

Soit $W \subset \mathbb{R}^5$ l'ensemble des solutions du système. Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.
2. W possède un seul vecteur si $b \neq 0$.
3. Si $b = 0$ alors W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension 2.
4. Si $b = 0$ alors W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3.

Exercice 5. Soit K un corps. Soit V un K -espace vectoriel et soient W_1, W_2 deux sous-espaces vectoriels de V tels que $V = W_1 \oplus W_2$.

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. Pour tout sous-espace vectoriel U de V , $U = (U \cap W_1) \oplus (U \cap W_2)$.
2. Si B_i est une base de W_i pour $i = 1, 2$, alors $B_1 \cup B_2$ est une base de V .
3. Si V est de dimension finie alors W_1 et W_2 sont de dimension finie et

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - 2 \dim(W_1 \cap W_2).$$

4. Pour tout sous-espace vectoriel U de V , si $U \cap W_1 = \{0\}$, alors $U \subset W_2$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. On suppose que $\det(A) = \alpha$.

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. $\det \begin{pmatrix} 2c & b & a \\ 2z & y & x \\ 2t & s & r \end{pmatrix} = -2\alpha$.
2. $\det \begin{pmatrix} a & x & r \\ b & y & s \\ c & z & t \end{pmatrix} = \alpha$.
3. $\det \begin{pmatrix} 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ x & y & z \\ r & s & t \end{pmatrix} = -\alpha$.
4. $\det \begin{pmatrix} a & -b & -c \\ -x & y & z \\ -r & s & t \end{pmatrix} = \alpha$.
5. Si $b = c$ et $y = z$ alors $\alpha = 0$ si et seulement si $s = t$.

Exercice 7. Questions à choix multiples. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

(1) Dans $(\mathbb{F}_5)^4$, on considère les 4 vecteurs

$$f_1 = (1, a, 1, a), \quad f_2 = (1, 1, a, a), \quad f_3 = (0, 3 + 2a, 2 + 3a, 0), \quad f_4 = (1, a, -a, a),$$

où $a \in \mathbb{F}_5$.

- ☐ Pour tout $a \in \mathbb{F}_5$, $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une partie libre.
- ☐ Il existe $a \in \mathbb{F}_5$ telle que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une partie libre.
- ☐ Si $a \neq 1$, alors $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une base de $(\mathbb{F}_5)^4$.
- ☐ Si $a = 0$ alors $\{f_1, f_2, f_4\}$ est une partie libre.

(2) Soit $\alpha : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application $\mathbb{R}$ -linéaire définie par

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b + d, b + c, a - c + d, d).$$

- ☐ α est injective et surjective.
- ☐ $B = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -1)\}$ est une base de $\text{Im}(\alpha)$.
- ☐ $\ker(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et $B = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$ est une base de $\text{Im}(\alpha)$.
- ☐ $\text{Im}(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et $E = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\ker(\alpha)$.

(3) Soit $X = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = c + 2\}$, $Y = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 2c\}$, et $Z = \{(0, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b + c + d = 0\}$.

- ☐ X est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3.
- ☐ Y est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.
- ☐ Z est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ avec base $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$
- ☐ $Y \cap Z$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ avec base $\{(0, 2, 1, -3)\}$.

(4) Soit K un corps, et soient E une base ordonnée de K^2 et F une base ordonnée de K^3 . Soient $A \in M_{2 \times 3}(K)$ de rang 2, $B \in M_{3 \times 3}(K)$ de déterminant nul et $C \in M_{3 \times 2}(K)$ de rang 2.

- ☐ Il existe $\alpha \in \mathcal{L}(K^3, K^2)$ injective telle que $(\alpha)_F^E = A$.
- ☐ Il existe $\alpha \in \mathcal{L}(K^2, K^3)$ injective telle que $(\alpha)_E^F = C$.
- ☐ Il existe $\alpha \in \mathcal{L}(K^3, K^3)$ surjective avec $(\alpha)_E^E = CA$.
- ☐ Pour tout $\alpha \in \mathcal{L}(K^3, K^3)$ injective alors $\det(B \cdot (\alpha)_F^E) \neq 0$.

Exercice 8. Soient V un $\mathbb{F}_5$ -espace vectoriel. Soit $v_1, v_2, \dots, v_m$ des vecteurs distincts de V , avec $m \geq 3$, et posons

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V.$$

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. Si v_1, v_2, v_3 sont libres alors $v_1 + v_2, v_1 + v_3, 2v_1 - 3v_2$ sont libres.
2. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}$ est libre et $V = \text{Vect}(S)$ alors S est une base de V .
3. Si S est une base de V alors V possède un nombre fini de vecteurs.

Exercice 9. Soit $A \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R})$. Laquelle des affirmations suivantes équivaut à dire que $\text{rang}(A) = 3$?

- ☐ A a une ligne nulle.
- ☐ A a deux colonnes nulles.
- ☐ Il existe au moins une colonne de A qui est une combinaison linéaire des autres colonnes.
- ☐ Il existe au moins une ligne de A qui est une combinaison linéaire des autres lignes.
- ☐ Aucune des autres assertions n'est correcte.

Exercice 10. On considère le système linéaire

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0.\end{aligned}$$

Soit W l'ensemble de toutes les solutions de ce système dans $\mathbb{F}_5^4$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ W contient 1 élément.
- ☐ W contient 16 éléments.
- ☐ W contient 25 éléments.
- ☐ W contient un nombre infini d'éléments.

Exercice 11. Soit V un K -espace vectoriel de dimension m et soient U et W des sous-espaces vectoriels de V tels qu'aucun des deux n'est inclus dans l'autre. Lesquelles des affirmations suivantes sont correctes ?

1. Si $m = 6$ et $\dim U = 4 = \dim W$, alors on a toujours que $U + W = V$.
2. Si $m = 5$ et $\dim U = 3$ et $\dim W = 4$, alors on a toujours que $U + W = V$.

Exercice 12. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

- (a) Soit V un K -espace vectoriel et soit $W \subseteq V$ tel que $(W, +)$ est un sous-groupe du groupe abélien $(V, +)$. Alors W est un sous-espace vectoriel de V .
- (b) Soit V un K -espace vectoriel et soit $\emptyset \neq X \subseteq V$ et $X \neq \{0_V\}$. Alors $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace différent de $\{0_V\}$.
- (c) Soit $(G, +)$ un groupe abélien. On définit une application

$$\cdot : K \times G \rightarrow G$$

par

$$(\lambda, g) \mapsto \lambda \cdot g := g$$

pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $g \in G$. Avec la loi interne $+$ sur G et la loi externe définie ci-dessus, G est un K -espace vectoriel.

- (d) Soit V un K -espace vectoriel et $W \subseteq V$ tel que pour tout $\lambda, \mu \in K$ et pour tout $u, v \in W$, on a $\lambda u + \mu v \in W$. Alors W est un sous-espace vectoriel de V .
- (e) Soient V un K -espace vectoriel avec sous-espaces U_1, U_2, U_3 . Si $U_1 + U_2 + U_3 = U_1 + U_2$ alors $U_3 \subseteq U_1 + U_2$.

Exercice 13. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

- a) L'application $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(z_1, z_2) = z_1 - \overline{z_2}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire.
- b) L'application ϕ du point a) est $\mathbb{R}$ -linéaire.
- c) L'ensemble $\phi^{-1}(0)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
- d) L'ensemble $\phi^{-1}(0)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 14. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

- a) L'espace vectoriel $M_{2 \times 3}(K)$ est un anneau muni de l'addition et de la multiplication des matrices.
- b) Les matrices scalaires sont toujours inversibles.
- c) Soit A la matrice d'une application injective $\alpha : V \rightarrow W$ par rapport à des bases choisies de V et de W . Alors pour $v \in M_{n \times 1}(K)$ avec $n = \dim(V)$, $Av = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Exercice 15. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

- a) Pour une matrice $A \in M_{p \times n}(K)$, le rang de A est au plus $\min(p, n)$.

- b) Pour deux matrices A et B de même taille, si chaque ligne de A est une combinaison linéaire de lignes de B , alors A et B sont ligne-équivalentes.
- c) Soit V un K -espace vectoriel et soient $L_1 = \{v_1, v_2\}$ et $L_2 = \{w_1, w_2\}$ deux parties libres dans V telles que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Alors $\text{Vect}(L_1) + \text{Vect}(L_2)$ est la somme directe des deux sous-espaces $\text{Vect}(L_1)$ et $\text{Vect}(L_2)$.

Exercice 16. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- a) Si deux matrices carrées $A, B \in M_n(K)$ sont semblables, alors le rang-colonne de A est égal au rang-colonne de B .
- b) Si $A \in M_{p \times n}(K)$, le rang-ligne de A est égal au nombre de lignes non nulles de A .

Exercice 17. Répondre à chacune des questions suivantes en cochant la case correcte.

- a) On considère le système $AX = B$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée et $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice échelonnée réduite obtenue à partir de A possède au moins une ligne nulle. Est-ce que le système possède une solution unique ?
- ☐ Oui, toujours.
- ☐ Cela dépend de B .
- ☐ Non, jamais.

- b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Est-ce que le rang de A est égal à la dimension de l'espace des solutions du système linéaire $AX = 0$?

- ☐ Oui toujours, car le rang-ligne est égal à la dimension de l'espace des solutions du système.
- ☐ Oui si $a = 0$ et non si $a \neq 0$.
- ☐ Oui si $a = 1$ et non si $a \neq 1$.

- c) Soit $A, B \in M_n(K)$ avec $n \geq 2$. Est-ce que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?
- ☐ Oui, toujours.
- ☐ Oui si A et B sont diagonales.
- ☐ Oui si A et B sont triangulaires supérieures et si $B_{ii} = 0$ pour tout i .

Exercice 18. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- a) Le déterminant est une application K -linéaire de $M_n(K)$ dans K .
- b) Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous les coefficients sur la diagonale sont non nuls.
- c) Deux matrices $A, B \in M_n(K)$ sont semblables si et seulement si elles ont le même déterminant.
- d) Deux matrices carrées ligne-équivalentes ont le même déterminant.

Exercice 19. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- a) Un multiple scalaire d'un vecteur propre d'une transformation K -linéaire est encore un vecteur propre.
- b) Si une matrice A est diagonalisable, alors toute matrice semblable à A est diagonalisable.
- c) Soient α, β deux transformations K -linéaires de V . Si $v \in V$ est un vecteur propre commun de α et β , alors v est aussi un vecteur propre de $\alpha \circ \beta$.
- d) Si λ est une valeur propre d'une transformation K -linéaire α , alors, pour tout entier $k \geq 1$, λ^k est une valeur propre de α^k .

Exercice 20. Répondre à chacune des questions suivantes en cochant la case correcte.

- a) Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des x , donnée par $\pi(x, y) = (x, 0)$. Combien π possède de valeurs propres ?
- ☐ Aucune.
- ☐ Une.
- ☐ Deux.

- b) Soit $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\alpha(x, y) = (x - 2y, x - y)$. Quelles sont les valeurs propres de α ?
- ☐ Tous les nombres réels.
 - ☐ Aucun nombre réel.
 - ☐ Le nombre 1 car pour $y = 0$ on trouve que $(x, 0)$ est fixe par α .
- c) Soit $\alpha : V \rightarrow V$ une transformation $\mathbb{C}$ -linéaire d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Est-ce que $\alpha - \lambda \cdot \text{id}$ est injective ?
- ☐ Non, jamais.
 - ☐ Oui si λ est nombre réel et non sinon.
 - ☐ Oui si λ n'est pas une valeur propre de α et non sinon.

Exercice 21. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- a) Si une transformation K -linéaire est triangularisable, alors elle possède un vecteur propre.
- b) Si une matrice $A \in M_n(K)$ est diagonalisable, alors elle possède n valeurs propres distinctes.
- c) Si une matrice $A \in M_n(K)$ est triangularisable, alors $7A^2 - 2A + 5I_n$ est aussi triangularisable.
- d) Si une matrice $A \in M_n(K)$ est triangularisable, alors la somme des carrés de ses valeurs propres (répétitions comprises) est égale à $\text{Tr}(A^2)$.