Corrigé 3

24 septembre 2024

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 3. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 1 octobre.

Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira parfois a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$. (Voir les remarques au debut de l'exercice 6.)

Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Exercice 1. *(a) Soient $(G, \star)$ et $(H, \circ)$ deux groupes et $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Montrer que le noyau de f est un sous-groupe de G et que l'image de f est un sous-groupe de H.*

(b) Soit K un sous-groupe de G. Montrer que $f(K) := \{f(x) \mid x \in K\}$ est un sous-groupe de H.

Exercice 2. *Soit G un groupe abélien avec élément neutre e et posons $G_2 = \{x \in G \mid x^2 = e\}$. Montrer que G_2 est un sous-groupe de G. Dans le cas particulier du groupe $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, trouver G_2.*

Exercice 3. *Soit S^1 le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$, i.e. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. On définit la loi de composition $*$ sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Par un exercice d'une série précédente, on sait que $(S^1, *)$ est un groupe.
Soit $f : \mathbb{R} \to S^1$ l'application définie par $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est un homomorphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(S^1, *)$.

b) Montrer que f est surjective et déterminer son noyau $\mathrm{Ker}\,(f)$.

c) L'application f est-elle un isomorphisme de groupes, c'est-à-dire, un morphisme bijectif?

Exercice 4. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soient $f, h : G \to G$ deux applications définies par $f(x) = x^{-1}$ (l'inverse de $x \in G$) et $h(x) = x^2$.*

a) Montrer que f est un homomorphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

b) Montrer que h est un homomorphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

c) Montrer que f est bijective et que pour le groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, l'application h n'est pas bijective.

Exercice 5. *Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ (muni de l'addition et de la multiplication usuelle) sont des anneaux unitaires?*

(a) l'ensemble des entiers divisibles par 3, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{A} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, ab \neq 0, \mathrm{pgcd}(a, b) = 1, b \text{ impair}\} \cup \{0\}$.

Exercice 6. Pour cet exercice et le suivant, on introduit une définition qui sera vu en cours le mercredi 25. Pour un nombre premier p, on note $\mathbb{F}_p$ pour l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On verra que cet anneau possède des propriétés grâce auxquelles on l'appellera *le corps à p éléments.* Ce n'est pas nécessaire pour résoudre les deux exercices.

Répondre à chacune des questions suivantes.

a) Est-ce que l'équation $x^2 - 2 = 0$ a des solutions dans le corps $\mathbb{F}_{11}$?

b) Est-ce que l'équation $x^2 = -4$ a des solutions dans le corps $\mathbb{F}_{13}$?

Exercice 7. *Résoudre les équations* $x^2 + 2x + 2 = 0$ *et* $x^2 + 2x + 3 = 0$ *dans le corps* $\mathbb{F}_5$.

Exercice 8. *On considère l'anneau* $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ *des entiers modulo* 12. *Trouver tous les éléments inversibles dans* A. *(Rappel: dans un anneau, les éléments inversibles sont ceux qui possèdent un inverse par rapport à la multiplication.)*

Exercice 9. *Soit* A *un anneau unitaire et soit* E *un ensemble non vide. On rappel que l'anneau* $\mathrm{App}(E, A)$ *est l'ensemble des applications de* E *dans* A *avec les lois d'addition et de multiplication définies comme suit:*

pour $f, g \in \mathrm{App}(E, A)$, *on a* $f + g \in \mathrm{App}(E, A)$ *définie par* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ *et* $fg \in \mathrm{App}(E, A)$ *définie par* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *pour tout* $x \in E$. *On admet que ces lois munissent* $\mathrm{App}(E, A)$ *avec la structure d'un anneau unitaire. Montrer que si* A *est non commutatif alors l'anneau unitaire* $\mathrm{App}(E, A)$ *est aussi non commutatif.*

Exercice 10 (Facultatif pour ceux qui aiment des petits exercices de théorie des groupes, pour s'amuser)**.** *On considère un groupe* G *à 6 éléments. Tout d'abord, montrer que dans la table de la loi de composition de* G, *chaque ligne consiste en les 6 éléments de* G *ainsi que chaque colonne. Précisément, il n'y a aucune répétition d'éléments dans une ligne ni dans une colonne.*

Soit e *l'élément neutre dans* G. *On suppose qu'il existe* $x_1, x_2 \in G$ *deux éléments distincts et non égaux à* e *tels que* $x_1^2 = e = x_2^2$ *et* $x_1 x_2 \neq x_2 x_1$. *Trouver la table de la loi.*