

Série 12

3 décembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.

On fixe un corps K .

On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n \times n}(K)$.

Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B , c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B .

L'exercice noté avec $(\dagger)$ est un peu plus difficile.

Exercice 1. Soit a un nombre complexe fixé. On considère les matrices complexes suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le déterminant de A en développant par rapport à une ligne ou à une colonne.
- Refaire a) en utilisant des opérations élémentaires.
- La matrice A est-elle inversible?
- Calculer le déterminant de B et celui de B^2 .
- Soit p un nombre premier. Si on considère B comme une matrice à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_p$ à p éléments, pour quels nombres premiers p la matrice B est-elle de rang 6?

Exercice 2 (Résultat à retenir car très utile dans les calculs de déterminants, en particulier pour calculer un polynôme caractéristique). Soient $A \in M_n(K)$, $B \in M_{n \times m}(K)$, $C \in M_{m \times n}(K)$ et $D \in M_m(K)$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Sachant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$, calculer $\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{vmatrix}$.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^{2012} + I_3 = 0$.

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, trouver toutes les valeurs propres de la transformations linéaire $\alpha : V \rightarrow V$, et tous les vecteurs propres associés.

- $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (2x + y, -y)$.
- $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$.
- $V = \mathbb{C}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$.
- $V = M_2(\mathbb{R})$, $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$.
- $V = \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $\alpha(f)(x) = -xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.
- $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle fermé $[a, b]$, $\alpha : V \rightarrow V$, $\alpha(f)(x) = -xf(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Exercice 6. Soit $\alpha : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un K -espace vectoriel V . Soit λ une valeur propre de α . L'espace propre associé à λ est par définition $E_\lambda = \{v \in V \mid \alpha(v) = \lambda v\}$.

- a) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de V .
- b) Montrer que $E_\lambda = \{\text{vecteurs propres correspondant à } \lambda\} \cup \{0\}$.
- c) Montrer que E_λ est invariant par α , c'est-à-dire que pour tout $w \in E_\lambda$ on a que $\alpha(w) \in E_\lambda$.
- d) Soit μ une valeur propre de α , différente de λ . Montrer que $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

Exercice 7. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel avec base ordonnée $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ et soit $\alpha \in \mathcal{L}(V, V)$ telle que

$$(\alpha)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que $2f_1 - f_2$ est un vecteur propre de α et en déduire une valeur propre de α .
- (b) Montrer que -5 est une valeur propre de α .
- (c) Trouver E_0 et E_{-5} .

Exercice 8. On considère les permutations suivantes:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 8 & 2 & 6 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 9 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = (1\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)(3\ 2),$$

$$\sigma_3 = (1\ 3)(2\ 4)(3\ 1)(5\ 6)(8\ 7)(2\ 8)(1\ 3)$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = (1\ 3\ 5\ 6)(3\ 7\ 2)(1\ 2)$$

$$\sigma_6 = (1\ 3)(2\ 4)(3\ 1)(4\ 5)(5\ 6)(4\ 8)$$

$$\sigma_7 \in S_9 \quad \text{définie par} \quad \sigma_7(i) = 10 - i$$

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_9 = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6),$$

$$\sigma_{10} = (2\ 3\ 5\ 6)(7\ 2\ 4\ 3)(1\ 2)(2\ 3)$$

Déterminer la signature de chacune des permutations.

Exercice 9 (Cet exercice complète une preuve du cours.). Soient $A \in M_{p \times n}(K)$ et $B \in M_{p \times 1}(K)$ et soit encore

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ où } x_1, \dots, x_n \text{ sont des inconnues. On suppose que } AX = B \text{ possède une solution } y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n.$$

Montrer que l'ensemble des solutions du système est $\{y + x \mid x \in K^n \text{ est une solution du système } AX = 0\}$.

Exercice 10 (Cet exercice complète une preuve du cours.). Soient V et W des K -espaces vectoriels et soit $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow W$ une application m -multilinéaire. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq m$ et pour tout $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \in V$ on a $\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, 0_V, v_{i+1}, \dots, v_m) = 0_W$.

Exercice 11 (Facultatif). Montrer que $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ est paire}\}$ est un sous-groupe de S_n . (Ce groupe s'appelle le groupe alterné de degré n .)

Exercice 12. (†) Soit $V = \mathcal{C}^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles définies sur $]0, 1[$ qui sont infiniment dérivables. Considérons la transformation linéaire $\alpha : V \rightarrow V$ envoyant $f \in V$ sur $\alpha(f)(x) = xf'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

a) Montrer que tout nombre réel λ est valeur propre de α en trouvant un vecteur propre f_λ correspondant.

b) Trouver ensuite tous les vecteurs propres de α .

Indication: Soit g_λ un autre vecteur propre de α associé à la valeur propre λ . Considérer $(g_\lambda/f_\lambda)'$.