EPFL Automne 2024
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 7

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

Des SEVs

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants sont-ils des SEVs (on pourra eventuellement discuter suivant la nature du corps K) ?

1. $U(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 2.y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
2. $U(\mathbb{Q}) = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ x^2 - 2.y^2 = 0\} \subset \mathbb{Q}^2$. (ou se trouve $\sqrt{2}$?)
3. $\{(x_1, \cdots, x_d) \in K^d,\ x_1 + \cdots + x_d = 0_K\} \subset K^d$.
4. $\{(x_1, \cdots, x_d) \in K^d,\ x_1 + \cdots + x_d = 6_K\} \subset K^d$.
5. Soit V un K-EV, X un ensemble et et

$$\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \mapsto V\}$$

l'EV des fonctions de X a valeurs dans V. Soit $I \subset X$ un sous-ensemble,

$$\mathcal{F}(X, V)_I = \{f : X \mapsto V, \forall x \in I,\ f(x) = 0_V\} \subset \mathcal{F}(X, V)$$

le sous-ensemble des fonctions s'annulant en tout point de I.

Exercice 2. Soit K un corps, $\mathcal{F}(K, K)$ l'espace vectoriel des fonctions de K a valeurs dans K et $\mathcal{F}(K, K)^+$ le sous-ensemble des fonctions paires (resp. $\mathcal{F}(K, K)^-$ des fonctions impaires) :

$$f : K \mapsto K,\ \forall x \in K,\ f(x) = f(-x)\ (resp.\ f(x) = -f(-x)).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}(K, K)^{\pm}$ sont des SEVs de $\mathcal{F}(K, K)$

2. Montrer que $\mathrm{car}(K) \neq 2$ on a une decomposition en somme directe

$$\mathcal{F}(K,K) = \mathcal{F}(K,K)^+ \oplus \mathcal{F}(K,K)^-.$$

3. Que ce passe-t-il si $\mathrm{car}(K) = 2$?

Exercice 3. Dans l'EV K^3 on considere la famille

$$\mathscr{F} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

1. Montrer que si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ $\mathscr{F}$ est libre.
2. Montrer sans faire de calculs que si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ $\mathscr{F}$ est generatrice.
3. Montrer que si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ la famille $\mathscr{F}$ est generatrice (et donc une base) en montrant que tout $v = (x,y,z) \in K^3$ s'ecrit explicitement comme combinaison lineaire des elements de cette famille.
4. Montrer que si $\mathrm{car}(K) = 2$ la famille $\mathscr{F}$ n'est ni libre, ni generatrice.

Exercice 4. Soit K un corps general, on notera 2 pour $2_K = 2.1_K$. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^2$ l'application definie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x+2y) \end{array}.$$

On admet que φ est lineaire.

1. Montrer que si $\mathrm{car}(K) \neq 3$ alors $\ker(\varphi) = \{0_2\}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = K^2$.
2. Si $\mathrm{car}(K) = 3$ montrer que le noyau et l'image sont de dimension 1 en donnant dans chaque cas un vecteur generateur (on observera que dans ce cas $2_K = -1_K$).

Applications lineaires et dimension

Exercice 5. Soient U est V des K-ev de dimension finie et

$$U \times V = \{(u,v),\ u \in U,\ v \in V\}$$

l'espace vectoriel produit.

1. Montrer en exhibant une base convenable formee a l'aide de bases de U et de V que

$$\dim U \times V = \dim U + \dim V.$$

Exercice 6. Soit K un corps, V un K-EV de dimension finie et $X, Y \subset V$ des SEVs tels que V est somme directe de X et Y :

$$V = X \oplus Y.$$

On vu que cela implique que pour tout $v \in V$ il existe un unique $x \in X$ et $y \in Y$ tel que

$$v = x + y. \tag{0.1}$$

1. Montrer que les projections :

   $$\pi_X : v \in V \mapsto x \in X, \ \pi_Y : v \in V \mapsto y \in Y$$

   (ou x et y sont definis par (0.1)) sont lineaires et verifient

   $$\pi_X^2 := \pi_X \circ \pi_X = \pi_X, \ \pi_Y^2 := \pi_Y \circ \pi_Y = \pi_Y, \ \pi_X \circ \pi_Y = \pi_Y \circ \pi_X = 0.$$

2. Montrer que l'application

   $$\bullet + \bullet : \begin{array}{ccc} X \times Y & \mapsto & V \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels et que si V est de dimension finie $\dim V = \dim X + \dim Y$.
3. Montrer qu'on obtient une base de V en prenant la reunion d'une base de X et d'une base de Y et que cette reunion est disjointe.

Exercice 7. ($\star$) Soient V, W deux espaces vectoriels et $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire. Montrer que

1. Si φ est injective alors l'image par φ d'une famille finie libre est libre et que si V est de dimension finie on a

   $$\dim V \leqslant \dim W.$$

2. Si φ est surjective alors l'image par φ d'une famille generatrice de V est generatrice de W ; en deduire que si V est de dimension finie alors W egalement et

   $$\dim(V) \geqslant \dim(W).$$

3. Que pouvez vous dire de φ si (V et W de dimensions finies).
   - L'image par φ d' une base de V est une famille libre de W ?
   - L'image par φ d'une base de V est une famille generatrice de W ?
   - L'image par φ d'une base de V est une base de W ?

Encore des corps !

Exercice 8. Soit K un corps fini et $k \subset K$ un sous-corps de K.

1. Montrer que $|K| = |k|^d$ pour $d_{K/k} \geqslant 1$ un entier. Pour cela on remarquera que K a une structure naturelle de k-espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que $|K| = p^{d_K}$ pour $d_K \geqslant 1$ un entier et $p = \mathrm{car}(K) \geqslant 2$ la caracteristique de K.
3. Soit $L \supset K \supset k$ un autre corps finit contenant K et k. Montrer que d_K divise d_L.

Les exercices suivants introduisent une methode generale pour construire des corps a partir d'autres corps via des matrices. En particulier on donne une recette pour construire un corps finis $\mathbb{F}_{p^2}$ de cardinal p^2 pour $p \geqslant 3$ premier.

Exercice 9 (Construction de corps a partir de matrices)**.** Soit K un corps d'element nul note 0 et d'unite 1 et

$$M_2(K) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in K\}$$

l'anneau des matrices 2×2 a coefficients dans K (muni de la somme $+$ et du produit des matrices $\times$).

On rappelle que la matrice nulle (l'element nul de $M_2(K)$) et la matrice identite (l'identite de $M_2(K)$) sont les matrices

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que le groupe des elements inversible de cet anneau est donne par les matrices de determinant inversible (cad non-nul puisque K est un corps)

$$M_2(K)^\times = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in K,\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \in K^\times\}.$$

1. Montrer (si vous ne l'avez jamais fait) que l'anneau $M_2(K)$ est egalement un K-espace vectoriel quand on le muni de la multiplication par les scalaires

   $$\lambda \in K, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \mapsto \lambda.M := \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

   et que l'on a la propriete d'associativite entre la multiplication par les scalaires et la multiplication des matrices : pour $\lambda \in K,\ M, N \in M_2(A)$

   $$\lambda.(M \times N) = (\lambda.M) \times N$$

   (on dit alors que l'anneau $M_2(K)$ est une K-algebre).

2. Montrer que l'ensemble des matrices (dites elementaires)

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forme une famille generatrice de $M_2(K)$ et montrer que $\dim_K M_2(K) = 4$.

3. Montrer que l'ensemble des matrices multiples de l'identite

$$K.\mathrm{Id}_2 = \{\lambda.\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in K\}$$

un sous-anneau de $M_2(K)$ isomorphe au corps K. C'est le corps des matrices scalaires 2×2.

4. Soit $I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ une matrice. montrer que $I^2 = I \times I$ peut s'ecrire comme combinaison lineaire de I et de Id_2 (on trouvera le determinant $\det(I) = ad - bc$ et la trace de I, $\mathrm{tr}(I) := a + d$) parmi les coefficients de cette combinaison.

5. En deduire que

$$K[I] := \langle \mathrm{Id}_2, I \rangle = K.\mathrm{Id}_2 + K.I = \{x.\mathrm{Id}_2 + y.I,\ x, y \in K\} \subset M_2(K)$$

le sous-K espace vectoriel de $M_2(K)$ engendre par les matrices Id_2 et I est un sous-anneau commutatif de $M_2(K)$ de dimension 2 (comme K-ev) ssi I n'est pas une matrice scalaire.

6. On considere to cas ou $I := I_d$ est la matrice

$$I_d = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $d \in K$.

Montrer que si $d = 0$ cet anneau n'est pas un anneau integre.

7. On suppose maintenant que d n'est pas un carre dans K (ie. il n'existe pas de $u \in K$ tel que $u^2 = d$; par exemple si $K = \mathbb{R}$, $d = -1$ marche). Montrer que l'equation polynomiale

$$x^2 - dy^2 = 0$$

n'a pas de solution non-nulle $(x, y) \in K^2 - \{(0, 0)\}$ (distinguer les cas $y = 0$ et $y \neq 0$).

En deduire que $K[I_d]$ est un corps. Pour cela verifiera qu'une matrice non-nulle de $K[I_d]$ est inversible et que l'inverse est encore dans $K[I_d]$.

Ce corps contient un sous-corps isomorphe a K, lequel ?

8. On suppose que $d \neq 0$ est un carre dans K (ie. il existe $x \in K$ tel que $x^2 = d$). Montrer que $K[I_d]$ n'est pas integre.

Exercice 10. On reprend l'exercice precedent en supposant que K est le corps fini $\mathbb{F}_p$ pour p premier.

1. Quel est la cardinal de $M_2(\mathbb{F}_p)$? Celui du sous-corps $K[I_d]$ (supposant que d n'est pas un carre dans $\mathbb{F}_p$) ?
2. Montrer que la classe de congruence $-1 \pmod 3 \in \mathbb{F}_3$ n'est pas est un carre dans $\mathbb{F}_3$ (il n'existe pas de $x \in \mathbb{F}_3$ tel que $x^2 = -1 \pmod 3$).
   Montrer que la classe de congruence $2 \pmod 5 \in \mathbb{F}_5$ n'est pas un carre dans $\mathbb{F}_5$.
3. On dispose ainsi de deux corps formes de matrices a coefficients dans $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_5$,

   $$\mathbb{F}_3[I_{-1 \pmod 3}],\ \mathbb{F}_5[I_{2 \pmod 5}]$$

   qu'on notera $\mathbb{F}_9$ et $\mathbb{F}_{25}$.
   Dans la question qui vient, on fait un leger abus de language en identifiant les corps $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_5$ avec les sous-corps de matrices scalaires $\mathbb{F}_3.\mathrm{Id}_2$ et $\mathbb{F}_5.\mathrm{Id}_2$ qui sont contenus dans $\mathbb{F}_9$ et $\mathbb{F}_{25}$.

   (a) Montrer que la classe de congruence $-1 \pmod 3 \in \mathbb{F}_3$ est un carre dans $\mathbb{F}_9$ (il existe $z \in \mathbb{F}_9$ tel que $z^2 = -1_3$).

   (b) Montrer que la classe de congruence $2 \pmod 5 \in \mathbb{F}_5$ est un carre dans $\mathbb{F}_{25}$.