EPFL — Automne 2024

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 5

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le vendredi de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1. (Equations dans les groupes). Soit $(G, \star)$, $(H, \cdot)$ des groupes et

$$\varphi : G \mapsto H$$

un morphisme et $\ker(\varphi)$ son noyau. Etant donne $h \in H$, on cherche a resoudre l'equation d'inconnue $g \in G$:

$$Eq(\varphi, h) : \qquad \varphi(g) = h.$$

L'ensemble des solutions de cette equation n'est autre que la preimage $\varphi^{(-1)}(\{h\})$...

1. Montrer que
$$\varphi^{(-1)}(\{h\})$$
est ou bien vide ou bien non vide ; dans ce dernier cas montrer qu'il existe $g_0 \in G$ tel que
$$\varphi^{(-1)}(\{h\}) = g_0 \star \ker(\varphi)$$
ou on a note
$$g_0 \star \ker(\varphi) = \{g_0 \star k,\ k \in \ker(\varphi)\}.$$
2. Montrer qu' on a egalement
$$\varphi^{(-1)}(\{h\}) = \ker(\varphi) \star g_0$$
avec
$$\ker(\varphi) \star g_0 = \{k \star g_0,\ k \in \ker(\varphi)\}.$$

Quel est l'ensemble de tous les $g_0 \in G$ ayant les proprietes

$$\varphi^{-1}(\{h\}) = g_0 \star \ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{h\}) = \ker(\varphi) \star g_0 \ ?$$

Cela vous rappelle-t-il quelque chose dans la resolution des systemes lineaires ? (pensez a "equation avec" et "sans second membre", "solution particuliere", "solution generale" ...)

Action de groupes

Soit X un ensemble, G un groupe et soit $G \curvearrowright X$ une action a gauche de G sur X. On representera (comme on prefere) cette action, soit sous la forme d'un morphisme

$$\varphi : G \mapsto \mathrm{Bij}(X),$$

soit sous la forme d'une application $\odot : (g, x) \in G \times X \mapsto g \odot x \in X$ verifiant les proprietes convenables.

Exercice 2. Soit $x \in X$, la G-orbite de x est le sous-ensemble des transformes de x par les elements de G :

$$G \odot x = \{g \odot x,\ g \in G\} \subset X.$$

On dit que x' est dans la G-orbite de x ssi

$$\text{il existe } g \in G, \text{ tel que } x' = \varphi(g)(x) = g \odot x$$

ou en d'autre termes ssi

$$x' \in \varphi(G)(x) = G \odot x.$$

On note cette relation

$$x' \sim_G x$$

1. Montrer que la relation $x' \sim_G x$ est une relation d'equivalence et que les classes d'equivalence de cette relation sont les G-orbites de X (les sous-ensembles de la forme $G \odot x$ pour $x \in X$). En particulier les differentes G-orbites forment un partition de X
   Ainsi la relation $x' \sim_G x$ peut se dire simplement
   "x et x' sont dans la meme G-orbite".
2. Soit $x \in X$, montrer que
   $$G_x = \{g \in G,\ g \odot x = x\} \subset G$$
   est un sous-groupe de G (appele le stabilisateur de x sous l'action de G)
3. Montrer que si x, x' sont dans la meme G-orbite alors il existe $g \in G$ tel que
   $$G_{x'} = g.G_x.g^{-1} = \mathrm{Ad}_g(G_x)$$
   (on verifiera que g tel que $x' = g \odot x$ convient).
   En particulier le stabilisateur de x', $G_{x'} = \mathrm{Ad}_g(G_x)$ est un sous-groupe isomorphe a G_x ; ainsi ils ont meme cardinal.

4. On considere le cas ou $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $G = \langle\sigma\rangle = \sigma^{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{S}_7$ pour σ la permutation donnee par

$$\sigma : 1 \to 3,\ 2 \to 7,\ 3 \to 5,\ 4 \to 6,\ 5 \to 1,\ 6 \to 4,\ 7 \to 2.$$

   L'action sur X est la restriction a G de l'action Èvidente de $\mathfrak{S}_7$.
   Calculer l'ordre n_σ de σ (ie le cardinal de $\sigma^{\mathbb{Z}}$).
5. Trouver la decomposition de X en orbites pour cette action (on notera qu'il suffit de considerer les σ^n pour $n \in [0, n_\sigma - 1]$) et on ecrira les differentes orbites sous la forme

$$(x_0 = \sigma^0(x_0), x_1 = \sigma(x_0), x_2 = \sigma^2(x_0), \cdots).$$

6. Pour chaque orbite de cette decomposition choisir un element x_0 et calculer le stabilisateur G_{x_0} (et son ordre).

Exercice 3. ($\star$) Soit $(G, .)$ un groupe et $g \in G$, un element ; l'application de translation a gauche par g est l'application

$$t_g : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ g' & \mapsto & g.g' \end{array}.$$

1. Montrer que l'application translation a gauche

$$t_\bullet : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathrm{Bij}(G) \\ g & \mapsto & t_g \end{array}$$

   est un morphisme de groupes de $(G, .)$ vers $(\mathrm{Bij}(G), \circ)$.
2. Montrer que $t_\bullet$ est injectif. Ainsi G est isomorphe au un sous-groupe $t_G \subset \mathrm{Bij}(G)$: le groupe des translations a gauche de G sur lui-meme et donc un groupe peut toujours se realiser comme sous-groupe d'un groupe de permutations d'un ensemble.

Exercice 4. On dit que deux groupes G, H sont isomorphes si il existe un morphisme de groupes bijectif φ entre G et H :

$$\psi : G \mapsto H.$$

On note cette relation

$$G \simeq H.$$

1. Montrer que cette relation est une relation d'equivalence (reflexive, symetrique, transitive). Ici on ignorera le fait que "l'ensemble" des groupes n'est pas un ensemble (mais une categorie).

2. Montrer que le groupe des automorphismes de G, $\mathrm{Aut}_{Gr}(G)$ agit sur l'ensemble des isomorphismes entre G et H, $\mathrm{Isom}_{Gr}(G, H)$ de la maniere suivante : a $\psi \in \mathrm{Isom}_{Gr}(G, H)$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}_{Gr}(G)$ on associe $\psi \circ \varphi$. Est ce une action a gauche ou a droite ? Suivant le cas en deduire une action a droite ou a gauche.
3. Definir des actions a gauche et a droite de $\mathrm{Aut}_{Gr}(Hs)$ sur $\mathrm{Isom}_{Gr}(G, H)$.
4. Soit $\psi \in \mathrm{Isom}_{Gr}(G, H)$ un isomorphisme. Montrer que l'ensemble des isomorphismes entre G et H verifie

$$\mathrm{Isom}_{Gr}(G, H) = \psi \circ \mathrm{Aut}_{Gr}(G) = \mathrm{Aut}_{Gr}(H) \circ \psi.$$

ou $\mathrm{Aut}_{Gr}(G)$ et $\mathrm{Aut}_{Gr}(H)$ sont les groupes d'automorphismes de G et H.

Premiers exercices sur les anneaux

Exercice 5. 1. Montrer que les seuls sous-anneaux de $\mathbb{Z}$ sont $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$.

2. Montrer que les seuls anneaux de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sont $\{0 \pmod q\}$ et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif. Soit l'ensemble

$$M_2(A) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in A\}$$

des matrices 2×2 a coefficients dans A. On muni cet ensemble des lois d'addition et de multiplication des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

1. Verifier (si vous ne l'avez jamais fait) que $M_2(A)$ est un anneau d'element nul la matrice nulle
$$0_{2(A)} = \begin{pmatrix} 0_A & 0_A \\ 0_A & 0_A \end{pmatrix}$$
et d'unite la matrice identite
$$\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1_A & 0_A \\ 0_A & 1_A \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires superieures
$$T_{\sup,2}(A) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, b, d \in A\} \subset M_2(A)$$
est un sous-anneau.

3. Montrer que si A possede au moins deux elements distincts alors $M_2(A)$ n'est pas commutatif : pour cela on montrera que $T_{\text{sup},2}(A)$ n'est pas commutatif (on notera d'abord que si A possede au moins deux elements alors $0_A \neq 1_A$).

Exercice 7. Soit $(A, +, ., 0_A, 1_A)$ un anneau . On a dit qu'un element $a \in A$ est inversible a gauche (resp. a droite) si il existe $b \in A$ (resp. $c \in A$) tel que

$$b.a = 1_A \ (resp.\ a.c = 1_A).$$

On dit que b est un inverse a gauche (resp. c est un inverse a droite)

1. On suppose que a est inversible a gauche ET inversible a droite (avec des inverses a gauche et a droite notes respectivement b et c). Montrer qu'alors

$$b = c$$

de sorte que a est inversible au sens du cours (les inverses a droite et a gauche etant les memes). On a alors vu que l'inverse est uniquement defini.

2. On va maintenant donner un exemple d'un anneau possedant un element inversible a gauche mais qui n'est pas inversible a droite. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions (toutes les fonctions, par seulement les morphismes de groupes) de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Alors avec l'addition et la *composition* des fonctions, on obtient un anneau

$$(\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}), +, \circ, \underline{0}, \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$$

Remarque. Dasn cet exercice la "multiplication" est la composition des fonctions pas la multiplication sur les fonctions induite par la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

En particulier l'anneau etudie ici est non commutatif.

(a) On considere la fonction de doublement

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \mapsto & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & D(n) = 2n \end{array}.$$

Soit $[\bullet] : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$ la fonction partie entiere ($[x]$ est le plus grand entier inferieur ou egal a x). Montrer que la fonction

$$H := [\frac{\bullet}{2}] : n \in \mathbb{Z} \mapsto [\frac{n}{2}] \in \mathbb{Z}$$

est un inverse a gauche de D

(b) Montrer que D n'admet pas d'inverse a droite : il n'existe pas de $H' : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ telle que

$$D \circ H' = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}.$$