EPFL Automne 2024
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 1

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle vers le Lundi de la semaine suivante.

1 Recurrences

Exercice 1. Le principe de recurrence est la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble de l'ensemble des entiers et $n_0 \geqslant 0$ un entier. On suppose que les deux conditions suivantes sont verifiees*

1. $n_0 \in \mathcal{N}$,
2. *et que si $n \in \mathcal{N}$ alors $n+1 \in \mathcal{N}$ ($n+1$ est ce qu'on a appele le "successeur" de n construit pendant le cours : en termes d'ensembles*

$$n+1 = \bigcup_{\{n,\{n\}\}} = \{0, 1, \cdots, n-1, n\}$$

mais on peut simplement y penser en terme d'entier comme on en a l'habitude).

Alors on a

$$\mathbb{N}_{\geqslant n_0} = \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0\} \subset \mathcal{N}.$$

1. Demontrer cette proposition (dans le langage "classique" avec les objets notion et raisonnement dont vous avez l'habitude ; sans utiliser le langage formel de la logique des predicats du premier ordre...).

Exercice 2. Utiliser le principe de recurrence ci-dessus pour demontrer les resultats suivants

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\Sigma_1(n) := 1 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En deduire que pour tout $n \geqslant 1$

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

2. Redemontrer ce dernier resultat a l'aide du principe de recurrence.
3. Pour tout entier $n \geqslant 0$

$$\Sigma_2(n) := 1^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Remarque 1.1. Dans ces deux cas on ne demande PAS de faire une redaction avec le classique raisonnement par recurrence en parlant de "Hypothese Initiale" et "Hypothese de recurrence, Heredite, etc..." mais de rediger une preuve "ensembliste" qui introduit dans chaque cas un ensemble $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ convenable auxquels on appliquera la Proposition du premier exercice ou la variante.

Remarque 1.2. On peut montrer (en particulier grace au principe de recurrence) que pour tout $k \geqslant 0$

$$\Sigma_k(n) := 1^k + \cdots + n^k = \sum_{i=1}^{n} i^k = P_k(n)$$

avec $P_k(X)$ un polynome a coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degre $k+1$; eg. $P_1(X) = \frac{X(X+1)}{2}$.

Remarque 1.3. Il est tout a fait possible d'obtenir ces formules directement sans recurrence : comme vous le savez quand il etait encore enfant C.F. Gauss a calcule $S_1(n)$ en ecrivant

$$2S_1(n) = (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1)...$$

Exercice 3. Soit $x > -1$ un nombre reel. Montrer en utilisant le principe de recurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx. \quad \textit{(Inegalite de Bernoulli)}$$

2 Ensembles

Exercice 4. On rappelle que si E est un ensemble, la reunion de E, $\bigcup_E$ est l'ensemble dont les elements sont exactement les elements des elements de E (on rappelle que ces elements sont eux-meme des ensembles qui peuvent donc posseder des elements).

1. Soit $A \neq \emptyset$ un ensemble non vide, montrer que

$$\bigcup_{\{A\}} = A.$$

2. Que valent
$$\bigcup_{\emptyset}, \bigcup_{\{\emptyset\}}, \bigcup_{\{\emptyset,A\}}?$$
3. Que vaut $A \cup \emptyset$?

Exercice 5. Soit X un ensemble. Pour A, B des sous-ensembles de X on defini la difference de A et B
$$A - B := \{x \in A,\ x \notin B\} \subset X$$
(les elements de A qui ne sont pas des elements de B). En particulier
$$X - A = \{x \in X,\ x \notin A\} \subset X$$
(l'ensemble des elements de X qui ne sont pas dans A) est appelle le *complementaire* de A dans X et est note A^c.

On defini alors la difference *symetrique* de A et B en posant
$$A\Delta B := A \cup B - A \cap B = \{x \in A \cup B,\ x \notin A \cap B\} \subset X$$
(les elements de X qui sont dans la reunion de A et B et qui ne sont pas dans leur intersection).

1. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A = (A - B) \cup (B - A)$.
2. Calculer $\emptyset\Delta A$, $A\Delta A$, $A\Delta X$, $A\Delta A^c$.

Exercice 6. On considere l'application polynomiale (dite de Cantor)
$$C : (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto ((m + n)^2 + m + 3n)/2 \in \mathbb{N}.$$
1. Verifier que C est bien une application de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$.
2. Calculer les valeurs $C(m, n)$ pour $m+n \leqslant 3$ et les reporter sur les point $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ d'une representation du quart de plan $\{(x, y),\ x, y \geqslant 0\}$.
3. Pour $k \geqslant 0$ un entier, on definit le sous-ensemble
$$D_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m + n = k\}.$$
Quelles sont les valeurs prises par $C(m, n)$ quand (m, n) decrit D_k ?
4. En deduire que pour tout entier $l \in \mathbb{N}$ il existe (m, n) tel que
$$C(m, n) = l$$
et que un tel couple (m, n) est unique. On dit que l'application polynomiale $C : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Remarque. Une autre application possible (obtenue par symetrie) est
$$C'(m, n) = ((m + n)^2 + 3m + n)/2.$$
On ne sait pas si il y existe d'autre applications polynomiales etablissant une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.