

Série 13

Pour cette serie et la suivante il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Sauf mention explicite du contraire, on suppose que le corps de base K est de caracteristique $\neq 2$ de sorte que $1_K \neq -1_K$.

Exercice 1. On considere la matrice suivante

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application lineaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ dans les bases canoniques.

1. En reduisant un systeme lineaire convenable trouver des bases du noyau et de l'image de φ ainsi que des equations cartesiennes de ces sous-espaces (avec un nombre minimal d'equations).

Formes multilineaires/symetriques/alternees

On note $\text{Mult}^{(n)}(V, K)$ l'espace des formes multilineaires en n variables sur V a valeurs dans K et on note $\text{Sym}^{(n)}(V; K)$ et $\text{Alt}^{(n)}(V; K)$ les sous-ensembles des formes symetriques et alternees.

Exercice 2. Les notations comme ci-dessus

1. Montrer que $\text{Alt}^{(n)}(V; K)$ et $\text{Sym}^{(n)}(V; K)$ sont des SEVs de $\text{Mult}^{(n)}(V; K)$.
2. Montrer que sur $\text{car}K \neq 2$,

$$\text{Alt}^{(n)}(V; K) \cap \text{Sym}^{(n)}(V; K) = \{\underline{0}_K\}$$

(ie. ils sont en somme directe).

3. Montrer que si $\text{car} K = 2$,

$$\text{Alt}^{(n)}(V; K) = \text{Sym}^{(n)}(V; K).$$

4. Montrer que si $n = 2$ on a

$$\text{Mult}^{(2)}(V; K) = \text{Alt}^{(2)}(V; K) \oplus \text{Sym}^{(2)}(V; K)$$

(toute forme bilinéaire peut se décomposer de manière unique en la somme d'une forme bilinéaire alternée et d'une forme bilinéaire symétrique ; ce n'est pas vrai pour $n \geq 3$). Pour cela s'inspirer du processus de symétrisation comme dans l'exemple des fonctions paires/impaires mais en utilisant une transformation d'ordre 2 convenable sur $\text{Mult}^{(2)}(V; K)$.

Exercice 3. Soit $\varphi : V \mapsto V$ une application linéaire. Pour toute forme multilinéaire Λ en n variables, on définit

$$\varphi^*(\Lambda) : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \Lambda(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)).$$

1. Montrer que $\varphi^*(\Lambda)$ est multilinéaire, alternée ou symétrique si Λ l'est.

Action par permutations

Exercice 4 (Rappels sur le groupe symétrique). Soit $n \geq 1$ et $\mathfrak{S}_n = \text{Bij}(\{1, \dots, n\})$ le groupe des permutations de n éléments. On rappelle qu'il existe un morphisme de groupes (la signature) non-trivial (qui n'est pas constant égal à 1)

$$\text{sign} : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

On va montrer que c'est le seul.

1. Soit G un groupe et $\varphi : G \mapsto C$ un morphisme vers un groupe commutatif C . Montrer que pour tout $g, h \in G$ on a

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h).$$

2. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$ (on écrira 1 et -1 pour les images de 1 et -1 dans K par le morphisme canonique) et $s : \mathfrak{S}_n \mapsto K^\times$ un morphisme non-trivial (différent du morphisme constant $\underline{1}$) ; montrer que pour toute transposition τ , $s(\tau) \in \{\pm 1\}$. Montrer qu'il existe une transposition τ telle que $s(\tau) = -1$.
3. Montrer que pour toute transposition τ' on a $s(\tau') = -1_K$ et que $s = \text{sign}$.

4. Montrer que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) = 0.$$

Pour cela on pourra considerer une transposition τ et faire le changement de variable $\sigma \leftrightarrow \sigma\tau$ dans la somme ci-dessus pour montrer qu'elle s'annule.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ et $\sigma : \{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$ une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

1. Montrer que

$$\sigma. \bullet : \Lambda \mapsto \sigma. \Lambda$$

definie par

$$\sigma. \Lambda : (v_1, \dots, v_n) = \Lambda(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

est une application lineaire de $\text{Mult}^{(n)}(V; K)$ sur $\text{Mult}^{(n)}(V; K)$.

2. Montrer que $\sigma. \bullet$ envoie le sous-espace $\text{Alt}^{(n)}(V; K)$ sur $\text{Alt}^{(n)}(V; K)$ et $\text{Sym}^{(n)}(V; K)$ sur $\text{Sym}^{(n)}(V; K)$ (quelque soit la signature de σ).

3. Soient $l_1, \dots, l_n : V \mapsto K$ des forme lineaires (pas forcément distinctes) montrer que

$$\sigma.(l_1 \otimes \dots \otimes l_n) = l_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes l_{\sigma^{-1}(n)}$$

ou σ^{-1} est la permutation reciproque.

Symetrisation

Dans le cours on a vu l'endomorphisme de symetrisation de l'espace $\text{Mult}^{(n)}(V, K)$:

$$\bullet_{\text{sign}} : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) \sigma. \Lambda$$

qui permet de produire une forme alternee : il correspond a l'action du groupe $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \text{Mult}^{(n)}(V, K)$ par permutation des variables et au morphisme

$$\text{sign} : \mathfrak{S}_n \mapsto \{\pm 1\}.$$

On definit egalement

$$\bullet_1 : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma. \Lambda$$

correspondant au morphisme trivial

$$1 : \mathfrak{S}_n \mapsto 1.$$

Exercice 6. On suppose $n = 2$ et soit V un EV de dimension $d \geq 2$ et de base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$.

1. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\text{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de formes lineaires ?
2. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_{\text{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de formes lineaires ?

Exercice 7. On suppose $n = 3$ et soit V un EV de dimension $d \geq 3$ et de base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$.

1. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\text{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de formes lineaires ?
2. Que valent $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\text{sign}}$ et $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_1$ comme sommes de produits tensoriels de formes lineaires ?

Exercice 8. Soit V un EV de dimension $d = 2$ et de base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Soient v_1, v_2 deux vecteurs de coordonnees

$$v_i = \sum_{j=1}^2 x_{ij} \mathbf{e}_j.$$

1. Exprimer $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^*)_{\text{sign}}(v_1, v_2)$ en fonction des $(x_{ij})_{i,j \leq 2}$

Exercice 9. Soit V un EV de dimension $d = 3$ et de base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Soient v_1, v_2, v_3 deux vecteurs de coordonnees

$$v_i = \sum_{j=1}^3 x_{ij} \mathbf{e}_j.$$

1. Exprimer $(\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*)_{\text{sign}}(v_1, v_2, v_3)$ en fonction des $(x_{ij})_{i,j \leq 3}$.

Exercice 10. On considere le cas n general.

1. Montrer que $\bullet_1$ envoie $\text{Mult}^{(n)}(V, K)$ sur $\text{Sym}^{(n)}(V; K)$ (on a vu dans le cours que $\bullet_{\text{sign}}$ envoie $\text{Mult}^{(n)}(V, K)$ sur $\text{Alt}^{(n)}(V; K)$).
2. Montrer que $\text{Sym}^{(n)}(V; K)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_{\text{sign}}$ et que $\text{Alt}^{(n)}(V; K)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_1$ (utiliser l'exercice 4).
3. Calculer Λ_{sign} si Λ est alternee.
4. Calculer Λ_1 si Λ est symetrique.

Matrices de permutation

Exercice 11. Soit V un K -ev de dimension d et $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V fixee. Soit $\sigma : \{1, \dots, d\} \mapsto \{1, \dots, d\}$ une permutation. On a vu dans la serie precedente qu'on peut lui associer une unique application lineaire φ_σ qui envoie chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ sur le vecteur $\mathbf{e}_{\sigma(i)}$ pour $i \leq d$:

$$\text{si } v = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_d \mathbf{e}_d \text{ alors } \varphi_\sigma(v) = x_1 \mathbf{e}_{\sigma(1)} + \dots + x_d \mathbf{e}_{\sigma(d)}.$$

1. Que vaut $\varphi_\sigma^*(\mathbf{e}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_d^*)$ (montrer que c'est un produit tensoriel de formes lineaires explicites) ?
2. Montrer que $\det(\varphi_\sigma) = \text{sign}(\sigma)$, soit par un calcul direct soit en montrant que pour τ une transposition $\det(\varphi_\tau) = -1$ et en considerant l'application

$$\sigma \mapsto \det(\varphi_\sigma)$$

conjointement avec l'exercice [4](#).