

Série 12

Tous les exercices seront corrigés.

Vous êtes fortement encouragés à essayer de résoudre (éventuellement à plusieurs) l'exercice (*) et à rendre votre solution (éventuellement à plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (éventuellement tapé en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative à cette série.

1 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application linéaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

1. En utilisant les techniques de réduction des systèmes linéaires discutées en cours cette semaine, donner une représentation cartésienne de $\text{Im } \varphi$ et une base de $\ker \varphi$ (vérifier la cohérence avec les résultats trouvés précédemment)

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre. Résoudre le système suivant (en fonction de a).

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & y & + & 4z & + & t & = & u \\ 6x & + & y & - & z & + & 2t & = & v \\ & & y & + & az & + & 3t & = & w \end{array}$$

En particulier,

1. Déterminer les inconnues libres et les inconnues principales et donner une représentation cartésienne de l'ensemble des (u, v, w) admettant au moins une solution.

2. Donner une base de l'espace des solutions quand $(u, v, w) = (0, 0, 0)$.

Exercice 3. Soit K un corps quelconque. Résoudre dans K le système ci-dessous (d'inconnues x, y, z, t, u) :

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2x & + & 4y & + & 3z & + & 11t & - & 10u & = & a \\ -x & - & 2y & + & 2z & + & 5t & + & 6u & = & b \\ & & & & 4z & + & 12t & - & 2u & = & c \\ 3x & + & 6y & - & 2z & - & 3t & + & 5u & = & d \end{array}$$

En particulier (prendre garde que les réponses peuvent dépendre de la caractéristique du corps $\text{car}(K)$)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que le système ait au moins une solution.
2. Déterminer les inconnues libres et les inconnues principales.
3. Donner quand $a = b = c = d = 0$, une représentation paramétrique de l'espace des solutions.

Exercice 4 ($\star$). Soit $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ le $\mathbb{R}$ -EV des polynômes de degré ≤ 3 ; une base est donnée par les monômes $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]_{\leq 3} & \mapsto & \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \\ P & \mapsto & X^2.P'' - (1+X)P' + P \end{array}$$

Ici P' et P'' désignent les dérivées premières et secondes de P .

1. Écrire $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
2. Résoudre le système $\varphi(P) = 0$ et en déduire une base de $\ker(\varphi)$.
3. Donner les équations cartésiennes de $\varphi(V)$.
4. Donner une base de $\varphi(V)$.

Inversion de matrices

Exercice 5. Soit $K = \mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ -1+i & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la réponse tous les nombres complexes présent devront être sous la forme $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$: par exemple on écrira $1/2 - i/2$ au lieu de $1/(1+i)$.

Matrices de permutation

Exercice 6. Soit $d \geq 1$, on note $\mathfrak{S}_d = \text{Bij}(\{1, \dots, d\})$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, d\}$ (équipe de la composition). Dans cet exercice vous aurez le droit d'utiliser ce que vous savez sur la structure du groupe $\mathfrak{S}_d$.

Soit V un K -ev de dimension d et $\mathcal{B}_d = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V fixée.

Soit $\sigma : \{1, \dots, d\} \mapsto \{1, \dots, d\}$ une permutation. On lui associe l'unique application linéaire φ_σ qui envoie chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ sur le vecteur $\mathbf{e}_{\sigma(i)}$ pour $i \leq d$:

$$\text{si } v = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_d \mathbf{e}_d \text{ alors } \varphi_\sigma(v) = x_1 \mathbf{e}_{\sigma(1)} + \dots + x_d \mathbf{e}_{\sigma(d)}.$$

1. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_d$ deux permutations. Calculer $\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau$ (en regardant son action sur un ensemble convenable de vecteurs).
2. Montrer que φ_σ est inversible et calculer son inverse.
3. Quand $d = 2, 3$ donner les matrices $M_\sigma = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_\sigma)$ des φ_σ calculées dans la base $\mathcal{B}_d$ (ces matrices sont appelées matrices de permutations).
4. Par échelonnement-réduction montrer que $M_{(123)}$ est inversible et que son inverse est une matrice de permutation.
5. Montrer que $\sigma \mapsto M_\sigma$ définit un morphisme de groupes injectif de $\mathfrak{S}_d$ vers $\text{GL}_d(K)$. L'image s'appelle le groupe des matrices de permutations.

Remarque. On rappelle que tout groupe fini G peut être réalisé comme (ie. par injection dans) un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_{|G|}$. Cet exercice montre donc que tout groupe fini peut être réalisé comme un sous-groupe du groupe des matrices inversibles $\text{GL}_d(K)$ (avec $d = |G|$). On appelle cela la *linearisation* : cela permet de ramener certaines questions de la théorie des groupes finis à des questions d'algèbre linéaire.

Un peu de bilinéarité

Exercice 7. Soit V un K -ev de dimension d sur un corps K un corps et $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V .

On définit le "produit scalaire euclidien" relativement à $\mathcal{B}$

$$\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathcal{B}} : (v, v') \in K^d \times K^d \rightarrow x_1 x'_1 + \dots + x_d x'_d$$

ou on a écrit

$$v = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_d \mathbf{e}_d, \quad v' = x'_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x'_d \mathbf{e}_d.$$

1. Montrer que $\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathcal{B}}$ est bilinéaire, symétrique et écrire sa décomposition dans la base $(\mathcal{B}^*)^{\otimes 2}$.
2. Montrer que l'application $\iota_{\mathcal{B}} : V \mapsto \mathcal{F}(V, K)$ qui à $v' \in V$ associe la fonction de V à valeurs dans K

$$\langle \bullet, v' \rangle_{\mathcal{B}} : v \mapsto \langle v, v' \rangle_{\mathcal{B}}$$

définit une application linéaire entre V et V^* .

3. Quelle est l'image de $\mathcal{B}$ par $\iota_{\mathcal{B}}$? Montrer que $\iota_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme entre V et V^* .
4. On suppose que $d = 2f$ est pair et que $\text{car}(K) \neq 2$. On définit la forme bilinéaire (dite symplectique)

$$\langle \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^f \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_{i+f}^* - \mathbf{e}_{i+f}^* \otimes \mathbf{e}_i^*.$$

Montrer $\langle \langle \bullet, \bullet \rangle \rangle_{\mathcal{B}}$ est alternée.

5. On considère l'application

$$\iota'_{\mathcal{B}} : v' \in V \mapsto \langle \langle \bullet, v' \rangle \rangle_{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}(V, K)$$

ou on a posé

$$\langle \langle \bullet, v' \rangle \rangle_{\mathcal{B}} : v \in V \mapsto \langle \langle v, v' \rangle \rangle_{\mathcal{B}} \in K.$$

Montrer que $\iota'_{\mathcal{B}}$ est une application linéaire entre V et V^* .

6. Quelle est l'image de la base $\mathcal{B}$ par $\iota'_{\mathcal{B}}$? Montrer que $\iota'_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.
7. Soit

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : (v, v') \in V \times V \mapsto \langle v, v' \rangle \in K$$

une forme bilinéaire sur V . On suppose qu'elle a la propriété suivante

$$\forall v' \in V, \exists v \in V \text{ tel que } \langle v, v' \rangle \neq 0;$$

on dit que cette forme est "non-dégénérée" ou est un "accouplement parfait", en anglais "perfect pairing").

Montrer que l'application

$$v' \in V \mapsto \langle \bullet, v' \rangle \in V^*$$

est un isomorphisme de K -EV.

Remarque 1.1. On a défini des isomorphismes entre V et V^* mais ils ne sont toujours pas canoniques : ils dépendent du choix de la forme bilinéaire.

Exercice 8 (Matrices compagnon). *TW : cet exercice implique la notion de polynome sur un corps K ainsi que l'anneau des polynomes $K[X]$; si vous n'etes pas familier avec ces notions, vous pouvez supposer que $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$*

Soit K un corps, $d \geq 1$, $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{d-1}) \in K^d$ et $X \in K^\times$ un element non-nul.

La matrice dite "compagnon" de $\mathbf{b}$ est la matrice suivante

$$M_{\mathbf{b}} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix}.$$

On a vu un tel exemple dans l'exercice 7 de la serie 10 avec $(b_0, b_1, b_2) = (1, 1, 1)$.

On voit $M_{\mathbf{b}}$ comme la matrice calculee dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ d'une application lineaire $\varphi_{\mathbf{b}} : K^d \rightarrow K^d$.

1. Que vaut $\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_i)$ pour $i \leq d-1$? Que vaut $\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_d)$?
2. En deduire que $\varphi_{\mathbf{b}}$ verifie l'equation polynomiale suivante dans $\text{End}_K(K^d)$

$$\varphi_{\mathbf{b}}^d + b_{d-1}\varphi_{\mathbf{b}}^{d-1} + \dots + b_0.\text{Id}_d = \mathbf{0}_d.$$

Pour cela on evaluera l'endomorphisme a gauche de l'egalite ci-dessus sur les elements de la base $\mathcal{B}$ et on montrera qu'on obtient le vecteur nul. Pour se faire une idee on pourra commencer avec $d = 3$.

3. Montrer que $M_{\mathbf{b}}$ verifie l'equation polynomiale

$$M_{\mathbf{b}}^d + b_{d-1}M_{\mathbf{b}}^{d-1} + \dots + b_0.\text{Id}_d = \mathbf{0}_d$$

et que l'espace vectoriel engendre par les puissances de $M_{\mathbf{b}}$

$$K[M_{\mathbf{b}}] := \text{Vect}(\{M_{\mathbf{b}}^0 = \text{Id}_d, M_{\mathbf{b}}, M_{\mathbf{b}}^2, M_{\mathbf{b}}^k, k \geq 3\})$$

est une sous K -algre de $M_d(K)$ de dimension d : on posera

$$P_{\mathbf{b}}(X) = X^d + b_{d-1}X + \dots + b_0X^0$$

de sorte que (en posant $M^0 = \text{Id}_d$) on a

$$P_{\mathbf{b}}(M_{\mathbf{b}}) = 0$$

et on utilisera (admis) le fait que tout polynome $P(X) \in K[X]$ peu s'ecrire

$$P(X) = P_{\mathbf{b}}(X)Q(X) + R(X), \quad Q(X), R(X) \in K[X], \quad \deg(R) \leq d-1.$$

4. On considère la matrice "caractéristique" de $M_{\mathbf{b}}$ définie pour $X \in K^\times$ par

$$d(X, M_{\mathbf{b}}) := X \cdot \text{Id}_d - M_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & X & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que $d(X, M_{\mathbf{b}})$ est inversible si et seulement si

$$X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \neq 0.$$

Pour cela on échelonnera-réduira cette matrice par une suite d'opérations de type (III) pour la rendre triangulaire supérieure.

5. Montrer que ce critère d'inversibilité reste vrai même si $X = 0$: $M_{\mathbf{b}}$ est inversible ssi $b_0 \neq 0$ (on pourra soit utiliser l'équation polynomiale satisfaite par $M_{\mathbf{b}}$ pour lui trouver un inverse ou utiliser des transformations de type (I)).
6. Dans le cas $d = 3$ calculez l'inverse de $d(X, M_{\mathbf{b}})$ (quand cet inverse existe).