

Série 11

Tous les exercices seront corrigés.

Vous êtes fortement encouragés à essayer de résoudre (éventuellement à plusieurs) l'exercice $(\star)$ et à rendre votre solution (éventuellement à plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (éventuellement tapé en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative à cette série.

L'exercice que vous avez tous demandé...

Exercice 1. Soient V et W des K -EVs de dimension finie isomorphes (en particulier $\dim V = \dim W = d$). On suppose que ces espaces sont isomorphes : ie. il existe un isomorphisme

$$\psi : V \simeq W.$$

1. Montrer que l'application

$$\text{Ad}(\psi) : \varphi \rightarrow \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

est une application linéaire de $\text{End}(V)$ sur $\text{End}(W)$.

2. Montrer de deux manières que c'est un isomorphisme de $\text{End}(V)$ sur $\text{End}(W)$ (par un argument de dimension, en trouvant une réciproque).
3. Montrer que $\text{Ad}(\psi)$ est un isomorphisme de K -algèbre.
4. Montrer que les groupes linéaires $\text{Aut}(V) = \text{GL}(V)$ et $\text{Aut}(W) = \text{GL}(W)$ sont isomorphes (comme groupes).

Remarque. En particulier on a un isomorphisme

$$\text{GL}(M_d(K)) \simeq \text{GL}(K^{d^2}) = \text{GL}_{d^2}(K)$$

ce que vous êtes nombreux à avoir demandé.

Le centre de tout

Exercice 2. Soit $d \geq 1$. On rappelle que le centre du groupe lineaire est defini par

$$Z_d(K) = \{C \in \text{GL}_d(K), \forall M \in \text{GL}_d(K), C.M = M.C\};$$

c'est sous-groupe du groupe lineaire forme des matrices inversibles qui commutent avec toutes les matrices inversibles :

On a vu en cours que le groupe des matrices scalaires non-nulles $K^\times \text{Id}_d = \{\lambda.\text{Id}_d, \lambda \in K^\times\} \subset \text{GL}_d(K)$ est exactement l'ensemble des matrices inversibles qui commutent avec *toutes* les matrices de $M_d(K)$ (et en particulier avec celles de $\text{GL}_d(K)$). On a donc l'inclusion

$$K^\times \text{Id}_d \subset Z_d(K).$$

On va montrer qu'en fait on a egalite.

Pour cela on introduit les matrices de *transvections* : soit

$$\mathcal{B}_{d,d}^0 = \{E_{ij}, i, j \leq d\} \subset M_d(K)$$

l'ensemble des matrices elementaires. Une matrice de transvection est une matrice de la forme

$$\text{Tr}_{ij,\lambda} := \text{Id}_d + \lambda.E_{ij}, \lambda \in K, i \neq j.$$

1. Montrer que $\text{Tr}_{ij,\lambda}$ est inversible et calculer son inverse (on cherchera l'inverse sous forme de matrice de transvection en utilisant la relation de produit des matrices elementaires : $E_{ij}.E_{kl} = \delta_{j=k}E_{il}$).
2. Montrer que

$$Z_d(K) = K^\times \text{Id}_d$$

en utilisant le fait qu'une matrice du centre commute avec toutes les matrices de transvections et avec toutes les matrices diagonales inversibles.

Transformations elementaires

Exercice 3. Soient

$$T_{ij}, D_{i,\lambda} (\lambda \neq 0), Cl_{ij,\mu}, i, j \leq d'$$

des matrices $d' \times d'$ des transformations elementaires.

1. En utilisant les expressions de ces matrices en terme de l'identite et des matrices elementaires E_{ij} (cf. le poly du cours), verifier que

$$T_{ij}^{-1} = T_{ij}, D_{i,\lambda}^{-1} = D_{i,1/\lambda}, Cl_{ij,\mu}^{-1} = Cl_{ij,-\mu}.$$

Exercice 4. Soit K un corps. On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(K)$$

1. Donner une succession de transformations élémentaires qui transforme M en la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \text{car}(K) = 2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } \text{car}(K) \neq 2$$

Exercice 5. On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application linéaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

1. En utilisant le résultat de l'exercice 6, donner une base de l'image $\varphi(\mathbb{Q}^4)$.
2. En utilisant la réduction des matrices représenter l'image $\varphi(\mathbb{Q}^4)$ sous forme cartésienne.
3. Trouver une base de $\ker(\varphi)$.

A la recherche d'une base

Exercice 6. Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$. Soit C_j , $j \leq d$ la j -ième colonne de M et

$$W = \langle C_1, \dots, C_d \rangle \subset \text{Col}_d(K)$$

l'espace vectoriel engendré par ces colonnes. Soit R la forme échelonnée réduite de M et $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq d$ ses échelons.

1. Montrer que $\{C_{j_1}, \dots, C_{j_r}\}$ (les colonnes de la matrice M) forme une base de W . Pour cela on écrira

$$R = T.M$$

avec T une matrice inversible et on considérera les produits

$$T.C_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Remarque 0.1. Si $M = \text{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi)$ pour $\varphi : V \mapsto W$ cet exercice permet de trouver une base de l'image $\varphi(V)$.

Inversion de matrices

Exercice 7. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & -3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer en fonction de $\text{car}(K)$ quand cette matrice est inversible.
2. Quand c'est le cas, calculer son inverse.

Preuve de la proposition 10.5 (d'après Yinghan)

Exercice 8. ($\star$) Soient $R, R' \in M_{d' \times d}(K)$ deux matrices échelonnées réduites et qui sont lignes équivalentes. On veut montrer que

$$R = R'.$$

Pour $L = (l_1, l_2, \dots, l_d) \in K^d$ un vecteur ligne et $1 \leq j \leq d$, on note

$$e_j^*(L) = l_j$$

la j -ième coordonnée (dans la base canonique) de L .

Soient $L_1, \dots, L_r, L'_1, \dots, L'_r \subset K^d$ les lignes non-nulles de R et R' (comme R et R' sont lignes équivalentes elles ont même rang donc $r = r'$), et soit

$$1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq d, 1 \leq j'_1 < \dots < j'_r \leq d$$

les positions des pivots de R et R' et

$$W(R) = \text{Vect}(\{L_1, \dots, L_r\}), W(R') = \text{Vect}(\{L'_1, \dots, L'_r\}) \subset K^d$$

les espaces vectoriels engendrés par les lignes (non-nulles) de R et R' . On notera également pour $1 \leq i \leq r$

$$W_i(R) = \text{Vect}(\{L_i, L_{i+1}, \dots, L_r\}), W_i(R') = \text{Vect}(\{L'_i, L'_{i+1}, \dots, L'_r\}).$$

En particulier $W_1(R) = W(R)$, $W_r(R) = K.L_r$ et $W_{i+1}(R) \subset W_i(R)$.

1. Pourquoi a-t-on $W(R) = W(R')$?

2. Montrer que pour $1 \leq i, k \leq r$, on a

$$e_{j_i}^*(L_k) = \delta_{k=i}$$

et en deduire que pour tout $L \in W(R)$ on a

$$L = \sum_{i=1}^r e_{j_i}^*(L) L_i$$

(pour la deuxiemem partie, on ecrira L comme CL des L_i , $i \leq r$) et on identifiera les coefficients en appliquant les formes lineaires $e_{j_i}^*$.

3. Montrer que pour $L \in K^d$, on a

$$L \in W(R) \implies \forall j < j_1, e_j^*(L) = 0.$$

4. En deduire que $j'_1 \geq j_1$ puis que $j'_1 = j_1$ (en observant que R et R' ont des roles symetriques).
 5. Montrer que pour $L \in W(R)$, on a

$$L \in W_i(R) \iff \forall j < j_i, e_j^*(L) = 0.$$

6. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq r$ et tout $j < j'_i$ on a $e_j^*(L'_i) = 0$.
 7. Montrer que $L'_2 \in W_2(R)$ (utiliser que que $j'_2 > j'_1 = j_1$), puis que $j'_2 \geq j_2$ et enfin que $j'_2 = j_2$.
 8. Montrer (par recurrence) que pour $i = 1, \dots, r$, $j_i = j'_i$.
 9. En deduire que pour $i = 1, \dots, r$ $L'_i = L_i$ puis que $R = R'$ (on applique la premiere partie de la Question 2 aux L'_k en utilisant que $j'_i = j_i$).