

Série 10

Tous les exercices seront corrigés.

Vous êtes fortement encouragés à essayer de résoudre (éventuellement à plusieurs) l'exercice (★) et à rendre votre solution (éventuellement à plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (éventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative à cette série.

Rangs

Exercice 1. Déterminer le rang des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M.N$$

en fonction de la caractéristique du corps K .

Exercice 2. Soient $\varphi : U \mapsto V$ et $\psi : V \mapsto W$.

1. Montrer que $\text{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \text{rg}(\psi)$ (on pourra comparer deux images).
2. Montrer que $\text{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \text{rg}(\varphi)$ (on pourra comparer deux noyaux).
3. Montrer que si M, N sont des matrices de dimensions convenables

$$\text{rg}(M.N) \leq \text{rg}(M), \quad \text{rg}(M.N) \leq \text{rg}(N).$$

4. Montrer la deuxième inégalité ci-dessus en utilisant la première ainsi que des propriétés de la transposition.

Changements de bases

Exercice 3. On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application lineaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

1. Que vaut $\varphi(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4$?
2. Trouver une base du noyau et de l'image de φ .
3. Trouver deux matrices A et B telles que $A.M.B = I_{3 \times 4}(r)$ avec $r = \text{rg}(\varphi)$.

Exercice 4 (De l'interet de changer de base $(\star)$). Soit K un corps de caracteristique $\neq 3$ et

$$\begin{aligned} \varphi : K^2 &\mapsto K^2 \\ (x, y) &\mapsto (x/3 + 4y/3, -x/3 + 5y/3) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{(2, 1), (1, 2)\}$

1. Calculer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de K^2 et exprimer $(1, 0)$ et $(0, 1)$ en fonction de $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$ et calculer la matrice N de φ dans cette base de deux manieres :
 - Par la formule de changement de base pour les matrices.
 - Directement en exprimant $\varphi(\mathbf{f}_i)$ $i = 1, 2$ en combinaison lineaire de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.
 - Montrer que si on avait $\text{car}(K) = 3$ alors $\mathcal{B}$ ne serait pas une base.
3. Calculer par recurrence N^n pour tout entier $n \geq 0$ (on pose $N^0 = \text{Id}_2$).
4. Montrer par recurrence que si $C \in \text{GL}_2(K)$ et $U \in M_2(K)$ alors pour tout $n \geq 0$

$$(C.U.C^{-1})^n = C.U^n.C^{-1}.$$

5. En deduire une expression (relativement) elementaire de la puissance M^n pour tout $n \geq 0$.

Produits de matrices

Exercice 5. Soit $M = (m_{ij}) \in M_{d'' \times d'}(K)$ et $N = (n_{kl}) \in M_{d' \times d}(K)$. Montrer par un calcul litteral que

$${}^t(M.N) = {}^tN {}^tM.$$

Exercice 6. Soit K un corps et pour $d \geq 2$

$$\mathcal{B}_{22}^0 := \{E_{ij}, i, j \leq 2\} \subset M_2(K)$$

l'ensemble des matrices elementaires de taille 2 (on rappelle que c'est une base de $M_2(K)$: on l'appelle la base canonique de $M_2(K)$).

On definit les SEVs suivants de $M_2(K)$:

$$D_2(K) = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}) \text{ et } T_2(K) = \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22}).$$

1. Quelles sont les dimensions de ces SEVs ? Donner la forme generale d'une matrice dans ces deux SEVs ; comment appelle-t-on ces ensembles de matrices ?
2. Montrer que ces SEVs sont stables par produits et sont en fait des sous-algebres de $M_2(K)$.
3. Lesquelles de ces sous-algebres sont commutatives ?

Exercice 7. Soit K un corps. On considere la matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

1. Calculer $M^2 = M.M$, $M^3 = M.M.M$, et trouver $a_0, a_1, a_2 \in K$ tels que

$$\mathbf{0}_3 = M^3 + a_2.M^2 + a_1.M + a_0.Id_3.$$

2. Montrer (par recurrence) que pour tout $k \geq 3$, M^k est combinaison lineaire de $\{M^2, M, Id_3\}$.
3. On note

$$\begin{aligned} K[M] &= \text{Vect}(Id_3, M, M^2, \dots, M^k, \dots) \\ &= \{a_0.Id_3 + a_1.M + \dots + a_d.M^d, d \geq 1, a_0, a_1, \dots, a_d \in K\} \subset M_3(K) \end{aligned}$$

l'espace vectoriel des matrices engendre par toutes les puissances de M (on pose $M^0 = Id_3$).

- (a) Montrer que

$$K[M] = \text{Vect}(Id_3, M, M^2).$$

Quelle est la dimension de $K[M]$?

- (b) Montrer que $K[M]$ est stable par produit et que c'est un sous-anneau de $M_3(K)$.

Exercice 8. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \leq 2} \in M_2(K)$ une matrice et $[A.]$, l'application de multiplication a gauche par A :

$$[A.] : M \in M_2(K) \mapsto A.M \in M_2(K).$$

1. Montrer que $[A.]$ est lineaire.
2. Montrer que $[A.]$ est inversible ssi A est inversible.
3. Calculer la matrice de $[A.]$ dans la base canonique de $M_2(K)$ (formee des matrices elementaires dans l'ordre ci-dessous)

$$\mathcal{B}_{22}^0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}.$$

4. Montrer que

$$A^2 = \mathbf{0}_2 \text{ ssi } \text{Im}([A.]) \subset \text{ker}([A.])$$

(pour une direction remarquer que $A \in \text{Im}([A.])$).

5. On considere l'application

$$A \in M_2(K) \mapsto [A.] \in \text{End}(M_2(K)).$$

Montrer qu'elle est lineaire et injective.