

Math 110 : Algebre Lineaire Avancee

Prologue

La Théorie des Ensembles

Ensembles

Collection d'objets munis d'une relation d'appartenance"

$a \in A$: a est élément de A

$\Rightarrow$ Relation d'inclusion

$A \subset B$: les elts de A sont elts de B

Axiomes de la Theorie des Ensembles

Z F C

- Ensemble $\emptyset$ existe
 - Double inclusion
 - Ensemble des Parties $\mathcal{P}(A)$
 - Axiome de la Paire
 - Axiome de la Réunion
 - Axiome de l'infini
 - Axiome du Choix
- $\left. \begin{array}{l} \text{Axiome de la Paire} \\ \text{Axiome de la Réunion} \\ \text{Axiome de l'infini} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = \bigcup_{\{A, B\}}$

Construction de $\mathbb{N}$

$$0 = \emptyset \quad 1 = \{\emptyset\} \quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \dots$$

$$\leadsto \mathbb{Z} \dots \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

Produit Cartésien A, B des Ens

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

$$(a, b) := \{ a, \{ a, b \} \}$$

A Choix.

Produit arbitraire $(A_i)_{i \in I}$ $\underbrace{\quad}_{s, \forall i \in I}$

$$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset \iff A_i \neq \emptyset$$

Relations Binaires

Def: Soient A, B des Ens. Une relation entre A et B est un sous ensemble (les elts de A et B)

$$R \subset A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Si $(a, b) \in R$ on dit que a et b sont liés par la relation R :

$$a R b$$
$$a \sim_R b$$

Applications entre ensembles

Def. Soient X et Y des ensembles me
application de X vers Y , $f: X \rightarrow Y$
et la donnée pour chaque $x \in X$ d'un
unique élément $y \in Y$ qu'on appelle
image de x par l'application f et qu'on
note $f(x)$

Graphes : X, Y des Ens

Un graphe est une relation entre X et Y :

$G \subset X \times Y$ qui a la propriété suivante
 $\forall x \in X$ l'ensemble

$G_x = \{ y \in Y \mid (x, y) \in G \} \subset Y$
a exactement un élément.

Une application $f: X \rightarrow Y \iff G_f \subset X \times Y$

l'ensemble des applications de X vers Y est
un ensemble: l'ensemble des graphes ds $X \times Y$

$$\mathcal{F}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{ENS}}(X, Y) \subset \mathcal{P}(X \times Y). \\ = Y^X$$

Image, Preimage : $f: X \rightarrow Y$ une application

Déf: Soit $A \subset X$ l'image de A par f est le ss-ensemble de Y

$$f_*(A) = f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subset Y$$

⚠ A est vu comme ssens de X (et pas comme) elt de X

Def: Soit $B \subset Y$ la preimage de B par f
est le sens de X donne par

$$f^*(B) = f^{(-1)}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$$

l'ensemble des elt de X dont l'image par f est un elt de B .

Cas particuliers:

- Si $A = X$ $f(X) = f_*(X) = \text{Im}(f) \subset Y$
(image de X par f)

- Si $B = \{y\} \subset Y$ pour $y \in Y$

$$f^{(-1)}(\{y\}) = f^*(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

= l'ensemble des antécédents de y par f .

$$B=Y \quad f^{(-1)}(y) = f^*(y) = X.$$

$$\underline{\text{Rmq,}} \quad \text{si} \quad y \notin f(X) = \text{Im}(f)$$

$$f^{(-1)}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\} = \emptyset \in \mathcal{P}(X)$$

$$f_*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$A \subset X \rightarrow f_*(A) \subset Y$$

$$f^*: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

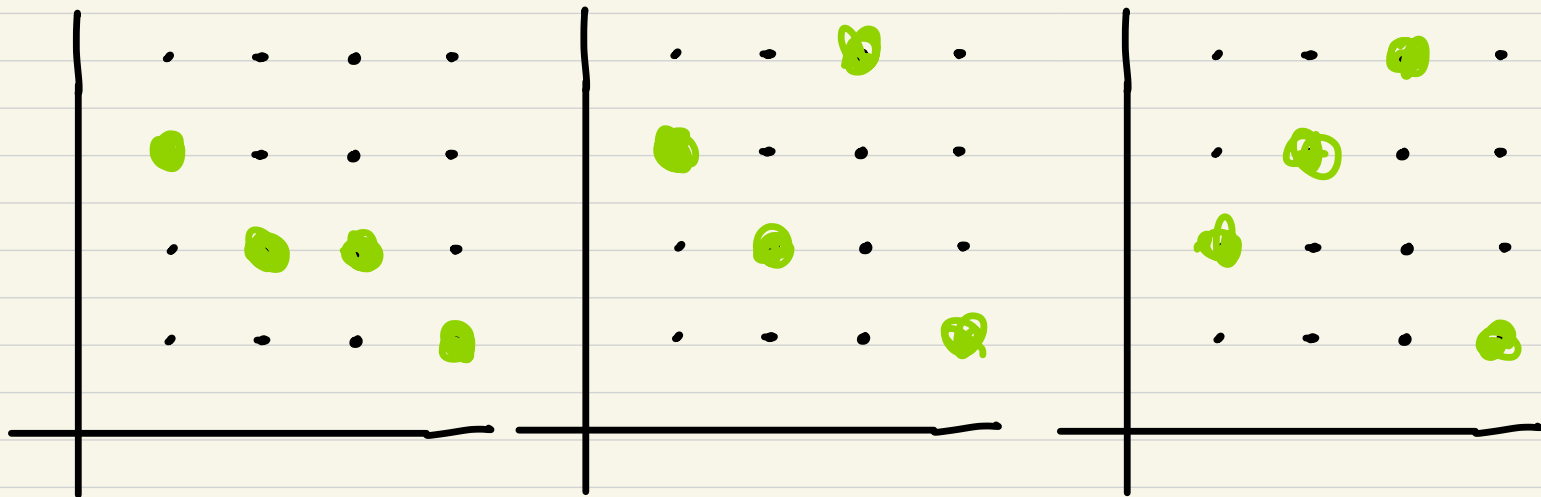
$$B \subset Y \rightarrow f^*(B) \subset X$$

$$X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$- f_1: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1$$

$$- f_2: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$$

$$- f_3: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$$



f_1

f_2

f_3

$$f_1(\{1,2\}) = \{3,2\} \quad f_2(\{1,2\}) = \{3,2\}$$

$$f_3(\{1,2\}) = \{2,3\} \quad \text{Im } f_1 = \{1,2,3\}$$

$$\text{Im } f_2 = \mathcal{V}$$

$$\text{Im } f_3 = \mathcal{V}$$

$$f_1^{(-1)}(\{1,2\}) = \{4,2,3\} \quad f_1^{(-1)}(\{4\}) = \emptyset \quad f_2^{(-1)}(\{2\}) = \{2\}$$

$$f_3^*(\{1,2,3\}) = \{1,2,4\}$$

Injectivité / Surjectivité / Bijectivité

X, Y des ens et une app. $f: X \rightarrow Y$.

Def: f est injective ssi $\forall y \in Y$

$f^{(-1)}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ possède au plus
1 elt.

Def. f est surjective ssi

$$\forall y \in Y \quad f^{(-1)}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

possède au moins un elt
(ie. est $\neq \emptyset$)

Df: f est bijective ssi f est injective
et surjective.

$\forall y \in Y \quad f^{(-1)}(\{y\})$ est un singleton
(a exactement un elt)

Notations: $f: X \rightarrow Y$

Si f est injective $f: X \hookrightarrow Y$
 $\backslash \text{hookrightarrow}$

Si f est surjective $f: X \twoheadrightarrow Y$
 $\backslash \text{surj}$
 $: X \mapsto Y \rightarrow \backslash \text{mapsto}$

Si f est bijective $f: X \xrightarrow{\sim} Y$
 $X \simeq Y \quad \backslash \text{isimeq}$

Notations:

$$\text{INJ}_{\text{ENS}}(X, Y), \text{SURJ}_{\text{ENS}}(X, Y)$$

$$\text{INJ}_{\text{ENS}} \wedge \text{SURJ}_{\text{ENS}} = \text{BIJ}_{\text{ENS}}(X, Y) = \text{Isom}_{\text{ENS}}(X, Y)$$

$$\subset \text{Hom}_{\text{ENS}}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$$

Examples

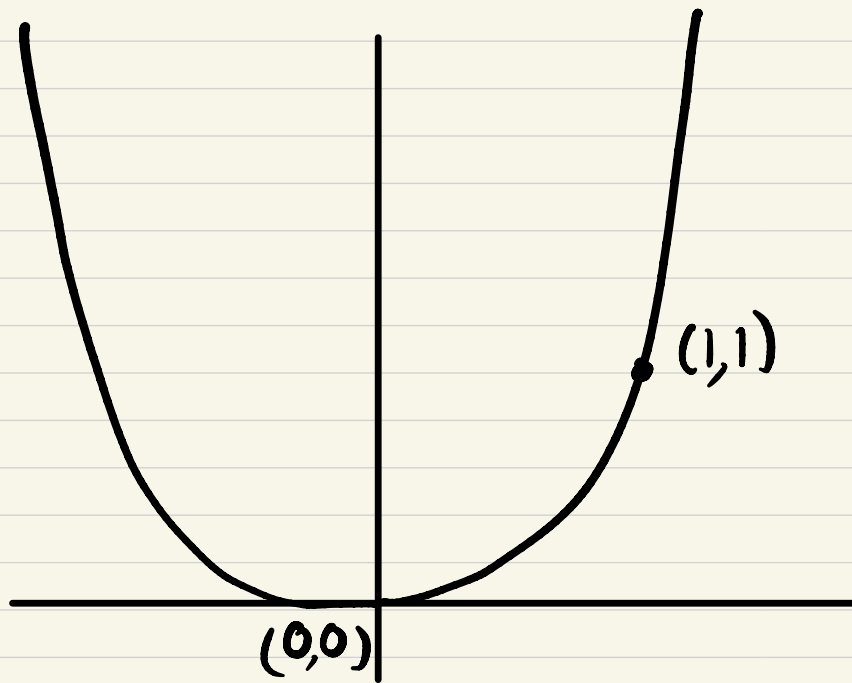
$$f_1: \text{passing } f^{(-1)}(\{2\}) = \{2, 3\}$$

$$\text{passing } f^{(-1)}(\{4\}) = \emptyset$$

$$f_2: \text{ing, sum, big}$$

$$f_3: \text{ing, sum, big}$$

Examples $f: x \mapsto x^2$



$$\mathbb{R} \xrightarrow{\left[x \rightarrow x^2 \right]} \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 pas inj
 pas surj

$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$
 inj
 pas surj

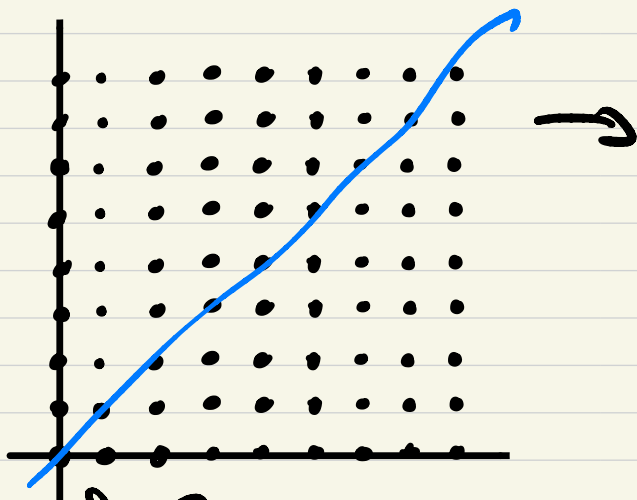
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

pas inj
 surj.

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

inj
 surj
 bij

Exemple: $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont en bijection



$$C: \mathbb{N}^2 \hookrightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, n) \mapsto \frac{(m+n)^2 + m + 3n}{2}$$

$$\quad \quad \quad \frac{(n+m)^2 + n + 3m}{2}$$

$$\forall k \geq 1$$

$\mathbb{N}^k$ est au bij
avec $\mathbb{N}$

par ex : $\mathbb{N}^3 \simeq \mathbb{N}$

$$\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N}^k = \mathbb{N}^{k-1} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$$

$\uparrow$ recurrence.

Def: on définit l'application réciproque

$f^{-1} : Y \rightarrow X$ qui à tout

$y \in Y$ associe l'unique élément de

$$f^{(-1)}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$$

⚡ THE WARNING ⚡

l'application réciproque f^{-1} n'existe que si f est bijective entre X et Y .

En revanche la préimage

$f^{(-1)}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ existe tout le temps.

Si f est bijective

$$\forall y \in Y \quad f^{(-1)}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}.$$

Involutivité de la Reciproque :

Soit $f: X \hookrightarrow Y$ et $f^{-1}: Y \rightarrow X$

sa reciproque

alors f^{-1} est bijective $f^{-1}: Y \hookrightarrow X$

$$\text{et } (f^{-1})^{-1} = f.$$

Composition d'applications: 3 sens X, Y, Z

$$f: X \rightarrow Y \quad g: Y \rightarrow Z$$

$$x \in X \xrightarrow{f} f(x) \in Y \xrightarrow{g} g(f(x)) \in Z$$

on a ainsi défini une application entre
 X et Z notée

$$g \circ f: X \rightarrow Z$$

definie pour $x \in X$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \in Z$$

On l'appelle la composée de f et g .

la composition des application defini
une application

$$\begin{aligned} \circ: \text{Hom}_{\text{ENS}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\text{ENS}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\text{ENS}}(X, Z) \\ (g, f) &\longrightarrow g \circ f \end{aligned}$$

Propriétés de la Composition

Associativité: $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow T$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \\ = h \circ g \circ f$$

Utilisation: $f: X \rightarrow X \quad f \circ f: X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f} X$

$$f \circ f \circ f: X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f} X$$

$$f \circ f = f^2 \quad f \circ f \circ f = f^3$$

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}} = f^k$$

$(f^k)_{k \geq 1}$ collection
d'applications
de X vers X

$$f^k \circ f^l = f^{k+l}$$

$$f^0 := \text{Id}_X$$

$$\text{Id}_X: x \in X \rightarrow x \in X$$