

Type 2 : • Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$$\text{On définit } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx$$

• De même, si $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$$\text{On définit } \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_n^b f(x) dx$$

• Exemple fondamental : $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?

• Si $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1)$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \end{cases}$$

Fin 16/12
←

Annonces : série 13 bis - forum - évaluation du cours

Si $\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t}$$

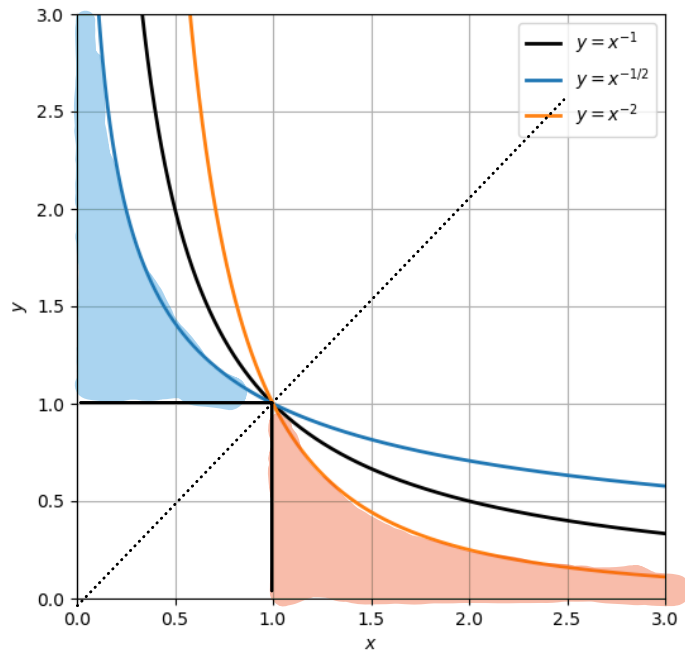
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(t)]_1^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

Résumé:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$



Rmq: Les fonctions $\left| \begin{array}{l}]0, 1] \rightarrow [1, +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \end{array} \right|$ et $\left| \begin{array}{l} [1, +\infty[\rightarrow]0, 1] \\ x \mapsto \frac{1}{x^{1/\alpha}} \end{array} \right|$

sont réciproques.

car pour $y, x > 0$,

$$y = \frac{1}{x^\alpha} \Leftrightarrow x^\alpha = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^{1/\alpha}}$$

Par symétrie de réflexion sur l'axe $y=x$, on a:

$$\begin{aligned} \text{Aire en bleu} &= \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} - 1 = \frac{1}{1-\alpha} - 1 \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1/\alpha}} = \text{Aire en orange} \end{aligned}$$

(avec $\alpha = \frac{1}{2}$)

Autres exemples :

$$(i) \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_1^{+\infty} \quad (\text{abrégé : } \lim_{u \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^u)$$
$$= 0 - \left(-\frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e} \quad (\text{l'intégrale converge}).$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_n^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

ssi les limites existent.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\arctan(x) \right]_0^n$$
$$= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan(n) - 0)$$
$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

⚠ On ne peut pas écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n f(t) dt$

Contre exemple : $\int_{-n}^n \sin(t) dt = 0, \quad \forall n > 0$ car $\sin$ est impaire.

$$\text{Mais } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sin(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\cos(t) \right]_0^n$$
$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\cos(n) + 1 \quad \text{n'existe pas}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt$ n'existe pas.

Type 3 : combinaison de type 1 et type 2.

Soit $f :]a, +\infty[$ continue

On définit $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$ où $c \in]a, +\infty[$ arbitraire
(ssi les 2 intégrales de droite convergent).

$$= \lim_{\alpha \rightarrow a+} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^n f(x) dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_{\alpha}^n f(x) dx$$

Example: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}$ continue sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left\{ \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (-2e^{-\sqrt{\beta}} + 2e^{-\sqrt{\alpha}}) \right\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (0 + 2e^{-\sqrt{\alpha}}) \\ &= 2. \end{aligned}$$

fin caus
←