

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad f(t) &= \sin(\cos(t)) \\
 &= \sin(1) + \cos(1) \cdot \left( -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + t^4 \varepsilon(t) \right) \\
 &\quad - \frac{\sin(1)}{2} \left( -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + t^4 \varepsilon(t) \right)^2 + \underbrace{t^4 \varepsilon(t)}_{\text{pourquoi}} \quad \text{avec } \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \\
 &= \sin(1) - \frac{\cos(1)}{2} t^2 + \left( \frac{\cos(1)}{24} - \frac{\sin(1)}{8} \right) t^4 + t^4 \varepsilon(t)
 \end{aligned}$$

(iv) On applique le thm. ci-dessus:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sin(1) \cdot x - \frac{\cos(1)}{6} x^3 + \left( \frac{\cos(1)}{24} - \frac{\sin(1)}{8} \right) \frac{x^5}{5} + x^5 \varepsilon(x).$$

où  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Fin 12/12

## 8.8 Intégration des séries entières

Thm. Une série entière peut s'intégrer terme à terme et le rayon de convergence de la série entière obtenue est le même que celui de la série d'origine.

Exemples:

(i) Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant 0 et  $f \in C^\infty(I)$ .

La série de Taylor de  $f$  en 0 (aussì appelée série de MacLaurin):

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Si  $S$  a pour rayon de convergence  $R > 0$ , alors pour  $x \in ]-R, R[$ , on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^x S(t) dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_0^x t^k dt \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} \\
 &\quad (\ell = k+1) \\
 &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{f^{(\ell-1)}(0)}{\ell!} x^\ell
 \end{aligned}$$

et cette série entière a pour rayon de convergence  $R > 0$ .

On reconnaît la série de Taylor associée à  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$\text{car } F^{(l)}(0) = \begin{cases} f^{(l-1)}(0) & \text{si } l \geq 1 \\ \underline{0} & \text{si } l = 0 \end{cases}$$

(ii) Soit  $f(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}$  (développement en série entière de exp).

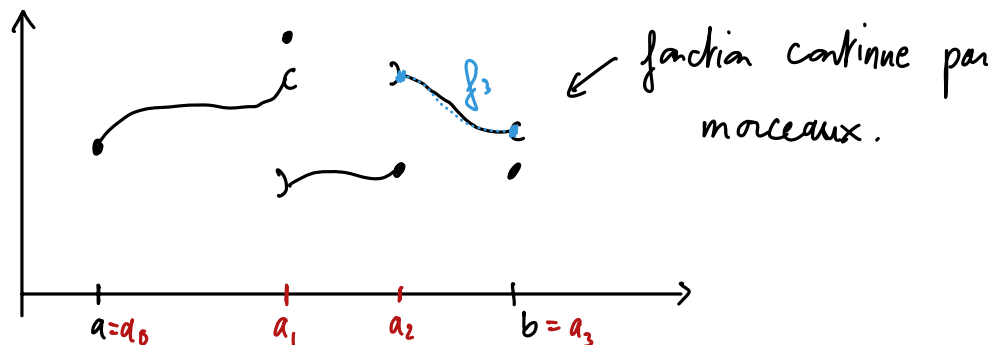
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \quad (R = +\infty)$$

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

## 8.9 Intégration des fonctions continues par morceaux

Def: Une fonction continue par morceaux est une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que il existe une subdivision  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  et  $n$  fonctions  $f_i: [a_{i-1}, a_i] \rightarrow \mathbb{R}$  continues, telles que

$$f(x) = f_i(x) \quad , \quad \forall x \in ]a_{i-1}, a_i[ \quad , \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$



Exemples de fonction qui n'est pas continue par morceaux:  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in ]0, 1] \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Def : Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux. Alors

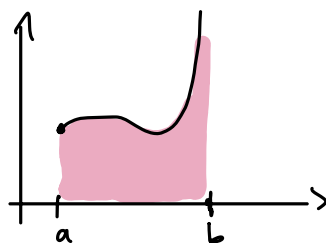
$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t) dt$$

Exemple :  $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \end{cases}$  ici  $\begin{cases} f_1(x) = 3 & \text{sur } [0, 1] \\ f_2(x) = 2 & \text{sur } [1, 4] \end{cases}$

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 3 dt + \int_1^4 2 dt = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9.$$

## Chapitre 9 : Intégrales généralisées (ou impropres).

8.1 Type 1 :  $f$  est continue sur  $[a, b[$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ).



• On définit  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(t) dt$  si la limite existe dans  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

• On peut aussi écrire  $\int_a^{b-} f(t) dt$  pour souligner que l'intégrale est généralisée en b.

• Si la limite est réelle ( $\in \mathbb{R}$ ) on dit que l'intégrale converge.  
Sinon on dit que l'intégrale diverge / ou que la fonction n'est pas intégrable.

→ Si  $f$  continue sur  $]a, b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(t) dt$ .

→ Si  $f$  continue sur  $]a, b[$  alors on choisit  $c \in ]a, b[$  quelconque

et on définit  $\int_{a+}^{b-} f(t) dt = \int_{a+}^c f(t) dt + \int_c^{b-} f(t) dt$   
ssi les deux intégrales existent.

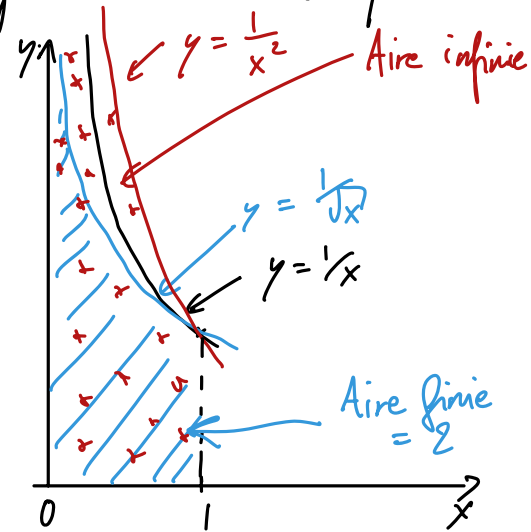
Exemple fondamental :

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  sur  $x \in ]0, 1]$ . Comportement de l'intégrale en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

• Si  $\alpha < 0$ ,  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  : intégrable au sens classique.

• Si  $\alpha > 0$ ,  $f$  est continue  $]0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha \neq 1, \quad \int_{0+}^1 \frac{dt}{t^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left[ \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$



$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } 1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha = 1, \quad \int_{0+}^1 \frac{dt}{t} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^1 \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} [\log(t)]_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (0 - \log(x)) = +\infty \end{aligned}$$

Autres exemples :

1) Calculer l'intégrale :  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$

⚠ Fausse piste :  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \left[ -\frac{1}{3} x^{-3} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} - \left( -\frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3}$  Faux.

La fonction n'est pas continue sur  $[-1, 1]$  donc on ne peut pas appliquer le thm. fondamental de l'analyse.

En fait :  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^{0-} \frac{dx}{x^4} + \int_{0+}^1 \frac{dx}{x^4} \stackrel{\text{fonction impaire}}{=} 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^4} = +\infty$

$$\begin{aligned} 2) \int_{0+}^1 \log(x) dx &= \lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^1 \log(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} [t \log t - t]_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-1 - \underbrace{x \log x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{x}_{\rightarrow 0}) = -1 \end{aligned}$$

Prop (critère de comparaison pour les intégrales). Soit  $f, g \in C^0([a, b[)$  telles que  $\exists c \in [a, b[$  tel que  $\forall x \in [c, b[$ ,  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Alors :

$$(i) \int_a^{b-} g(x) dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{b-} f(x) dx \text{ converge.}$$

$$(ii) \int_a^{b-} f(x) dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{b-} g(x) dx \text{ diverge.}$$

(S'adapte au cas des fonctions négatives et/ou l'intégrale généralisée sur  $]a, b]$ ).

Exemple :  $\int_0^1 \frac{\log(x)}{x} dx$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0+} \log(x) = -\infty$ ,  $\exists c \in ]0, 1]$  tel que  $\log(x) < -1$ ,  $\forall x \in ]0, c[$ .

Donc  $\forall x \in ]0, c[$ ,  $\frac{\log(x)}{x} \leq -\frac{1}{x}$  or  $\int_0^1 -\frac{dx}{x} = -\infty$  (diverge).

Donc par comparaison  $\int_0^1 \frac{\log(x)}{x} dx = \underbrace{\int_0^c \frac{\log(x)}{x} dx}_{=-\infty \text{ par comparaison}} + \underbrace{\int_c^1 \frac{\log(x)}{x} dx}_{\in \mathbb{R}} \stackrel{\text{diverge}}{=} -\infty$

**Type 2 :** • Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

$$\text{On définit } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx$$

• De même, si  $f : ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

$$\text{On définit } \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_n^b f(x) dx$$

• Exemple fondamental :  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  un paramètre,  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  ?

• Si  $\alpha \neq 1$  :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1)$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \end{cases}$$