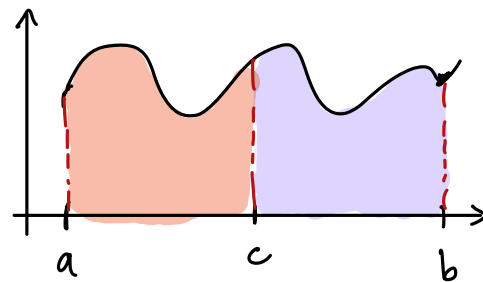


Propriété 3: (Relation de Chasles). Si $c \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Propriété 4: (Monotonie de l'intégrale)

Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

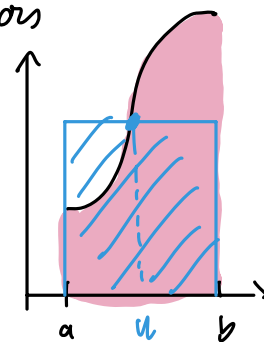
En particulier: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

car $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$

Propriété 5:

Thm (Théorème de la valeur moyenne). Soit $f \in C^0([a, b])$, alors
 $\exists u \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(u)$

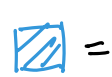
Rmq: $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est la moyenne de f sur $[a, b]$.



Thm (Théorème de la valeur moyenne généralisé).

Soient $f, g \in C^0([a, b])$ avec $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Alors $\exists u \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(u) \int_a^b g(x) dx$$

 =  Fin 05/12

Pour $g(x) = 1$, $\forall x \in [a, b]$, on retrouve le thm. de la valeur moyenne.

Preuve: Soit m et M le min et le max de f sur $[a, b]$. Comme $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$,
 $m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

Propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné

Par monotonie de l'intégrale :

$$\int_a^b m \cdot g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq \int_a^b M \cdot g(x) dx$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Donc $\exists v \in [m, M]$ tel que $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = v \cdot \int_a^b g(x) dx$

Par le thm. des valeurs intermédiaires $\exists u \in [a, b]$ tel que $f(u) = v$.

On conclut donc que $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(u) \cdot \int_a^b g(x) dx$ ■

8.4 Thm. fondamental de l'analyse

Thm: Soit $f \in C^0([a, b])$, ($a < b$). Alors :

(i) La fonction $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f , c'est-à-dire $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

(ii) Soit $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f , alors on a :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(ce thm. fait le lien entre intégrales définies et indéfinies)
aire sous une courbe primitives.

Preuve :

(i) Soit $x \in]a, b[$ (pour $x = a$ ou $x = b$, faire le même raisonnement avec les limites à gauche ou à droite). On a :

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \quad \left(\int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (h \cdot f(u_h)) \quad \text{avec } u_h \in [x, x+h] \text{ par thm. de la valeur moyenne} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f(u_h) = f(x) \text{ car } \lim_{h \rightarrow 0} u_h = x \text{ et } f \text{ est continue.}
\end{aligned}$$

(ii) Comme $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f (on vient de le montrer),
 $\exists C \in \mathbb{R}$, tel que $F(x) = G(x) + C$, $\forall x \in [a, b]$.

Que vaut C ?

• En a : $F(a) = \overbrace{\int_a^a f(t) dt}^{=0} + C$ donc $C = F(a)$.

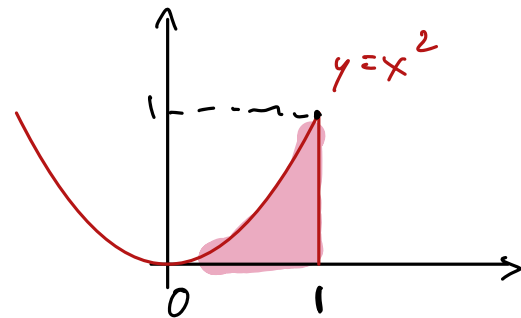
• En b : $F(b) = \int_a^b f(t) dt + C$

Ainsi $\int_a^b f(t) dt = F(b) - C = F(b) - F(a)$. ■

$\Rightarrow$ le calcul d'intégrales revient à la recherche de primitives.

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b \stackrel{\text{Notation}}{:=} F(b) - F(a)$$

Exemple : $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$.



8.5 Méthodes d'intégration

(en ligne : wolfram alpha).

8.5.1 Méthode directe

$\rightarrow$ Reconnaître une primitive de la fonction à intégrer (cf. tableau).

Ex : 1) $\int_0^1 a^x dx = \int_0^1 \exp(x \log(a)) dx$ où $a > 0$ et $a \neq 1$ paramètre.

$$= \frac{1}{\log(a)} \int_0^1 \log(a) \cdot \exp(x \log(a)) dx$$

$$= \frac{1}{\log(a)} \left[\exp(x \log(a)) \right]_0^1 = \frac{1}{\log(a)} (a - 1).$$

$$2) \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx = - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \quad \text{on reconnaît } \frac{f'}{f} = (\log f)' \text{ avec } f = \cos$$

$$= - \left[\log \cos(x) \right]_0^{\pi/4}$$

$$= - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \log(1) = \frac{1}{2} \log(2).$$

$$3) \int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

8.5.2 Changement de variable

Thm : Soit $f \in C^0(I)$, I intervalle et $[a, b] \subset I$.

Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ telle que $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$ et $\begin{cases} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{cases}$.

Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Mnémotechnique : $x = \varphi(t)$
 $dx = \varphi'(t) dt$ + changer les bornes d'intégration.

Preuve : Soit F une primitive de f sur I et $G = F \circ \varphi$.

Pour $t \in [\alpha, \beta]$, on a :

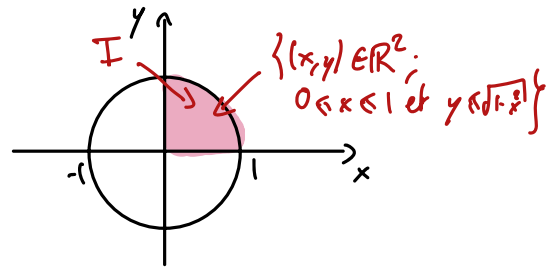
$$G'(t) = \varphi'(t) \cdot F'(\varphi(t)) = \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t))$$

$$\text{Donc } \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} G'(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx. \quad \square$$

Exemple: $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

Posons $\begin{cases} x = \sin(u) \\ dx = \cos(u) du \end{cases}$

Alors:
$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(u)^2} \cos(u) du$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos(u)^2 du = \frac{\pi}{4}$$



Par les intégrales indéfinies (calcul de primitives):

Thm: Soit I, J deux intervalles, $f \in C^0(I)$ et $\varphi: I \rightarrow J$, $\varphi \in C^1(I)$ et telle que φ est bijective. Soit G une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ alors $G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f sur I .

Preuve: Soit F une primitive de f sur J , $a \in I$:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= G(\varphi^{-1}(x)) - \underbrace{G(\varphi^{-1}(a))}_\text{constante (indépendant de x)} + C$$

Donc $G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f .

Exemple: $F(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx$

On pose $x = \sin(u) = \varphi(u)$; $\varphi: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$.

Une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \cos^2$ est (cf. ci-dessus):

$$G(u) = \int \cos^2(u) du = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2u)) du$$

$$= \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin(2u) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \sin(u) \cos(u) + C$$

par $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(trigo: $\sin(2u) = 2 \sin(u) \cos(u)$).

Donc $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$

$\cos = \sqrt{1 - \sin^2} \text{ sur } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$= \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{2} \sin(\arcsin(x)) \cdot \cos(\arcsin(x)) + C$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

pour $x \in [-1, 1]$

8.5.3 Intégration par parties

Thm: Soit $f, g \in C^1([a, b])$ alors :

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Preuve: On a $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Donc

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx = \int_a^b (f \cdot g)'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b$$

Exemples:

1) $\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$
 $= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$.

2) $\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx$
 $= e - 2 \cdot 1 = e - 2$.
 cf. ci-dessus.

3) Cas d'une intégrale indéfinie :

$$\int 1 \cdot \log(x) dx = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log(x) - x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$