

Rmq: on pourra se ramener au cas $x_0 = 0$ par un changement de variable.

$$y = x - x_0$$

Questions: convergence et valeur de la somme en fonction de x ?

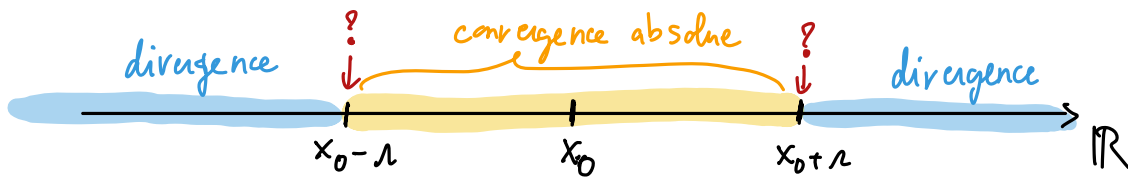
Thm: Il existe $\rho \in [0, +\infty]$ (signifie soit $\rho \in \mathbb{R}_+$ soit $\rho = +\infty$) tel que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$

• converge absolument pour $|x - x_0| < \rho$.

• et diverge pour $|x - x_0| > \rho$.

Remarques:

- le nombre ρ est appelé le rayon de convergence de la série entière.
- le Thm. ne dit rien pour le cas $|x - x_0| = \rho$.
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \rho = +\infty : \text{ la série converge absolument pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \text{si } \rho = 0 : \text{ la série ne converge que pour } x = x_0 \text{ (et alors } S = a_0) \end{array} \right.$



fin 28/11

Thm: On a $\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k}$ (avec la convention $0 \leq \frac{1}{+\infty}$ et $+\infty = \frac{1}{0}$)

De plus, si les limites existent, on a :

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k} = \frac{1}{\rho}$ (Cauchy)

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{\rho}$ (D'Alembert)

Preuve: $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{a_k (x - x_0)^k}_{b_k}$

Critère de la $\limsup$: $\rho = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |b_k|^{1/k}$

$$= \limsup_{k \rightarrow +\infty} |x - x_0| \cdot |a_k|^{1/k} = |x - x_0| \limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k}$$

→ La série $\begin{cases} \text{converge absolument si } \rho < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k} = \rho} \\ \text{diverge si } \rho > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k} = \rho} \end{cases}$

→ Conseil: se ramener aux outils d'étude des séries pour déterminer ρ .

7.4 Fonctions définies par des séries entières

Si $\rho \in]0, +\infty]$, on définit la fonction "somme de la série entière":

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

définie sur $D =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ (et éventuellement en $x_0 - \rho$ ou $x_0 + \rho$).

Thm (dérivée des séries entières). On peut dériver "terme à terme" la série entière, c'est-à-dire, pour $x \in D$ on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1} \quad (\text{pour } l = k-1)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} a_{l+1} \cdot (l+1) \cdot (x - x_0)^l$$

et le rayon de convergence de cette série entière est ρ . Plus généralement

on a $f \in C^\infty(]x_0 - \rho, x_0 + \rho[)$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}_{\frac{k!}{(k-n)!}} \cdot (x - x_0)^{k-n} \quad (\text{pour } l = k-n)$$

(*)

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} a_{l+n} \cdot \frac{(l+n)!}{l!} (x - x_0)^l \quad (\text{même rayon de convergence}).$$

Explication pour le rayon de convergence:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{k^{1/k}}_{\exp(\frac{1}{k} \log(k)) \rightarrow 1} |a_k|^{1/k} = \frac{1}{\rho \text{ de la série dérivée}}$$

Remarque: de (*) on déduit que $f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

→ c'est le coefficient donné par la formule de Taylor.

→ ceci montre aussi l'unicité des coefficients de la série entière.

7.5 Séries de Taylor d'une fonction

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f \in C^\infty(I)$.

Def: La série de Taylor de f en x_0 est : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$.

. La série de Mac-Laurin : cas particulier où $x_0 = 0$

Question: quand est-ce que l'on a $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$?

Quand c'est le cas sur I , on dit que f est développable en série entière.

Étudions un exemple: Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Calculons les dérivées successives de f en 0: pour $x \in D$:

$$f(x) = (1-x)^{-1}, \quad f'(x) = f(x) \cdot (-1) \cdot (1-x)^{-2}, \quad f''(x) = (-2) \cdot (-1) \cdot (1-x)^{-3}, \text{ etc}$$

par récurrence: $f^{(n)}(x) = n! \cdot (1-x)^{-n-1}$ donc $f^{(n)}(0) = n!$

Donc la série de Taylor de f est : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ (série géométrique).

La série converge absolument pour $x \in]-1, 1[$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = f(x)$
 $\leadsto$ Donc f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

⚠ la fonction est définie sur un intervalle plus grand que $]-1, 1[$.

Par ex: $f(2) = -1 \neq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k$ diverge.

$\rightarrow$ Autre technique plus générale pour étudier le lien entre f et sa série de Taylor:

Formule de Taylor, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n x^k}_{\text{Polynôme de Taylor}} + \underbrace{r_n(x)}_{\text{Reste}}$

$$\text{où } r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u_{n,x}) x^{n+1} \quad \text{où } u_{n,x} \in [0, x]$$

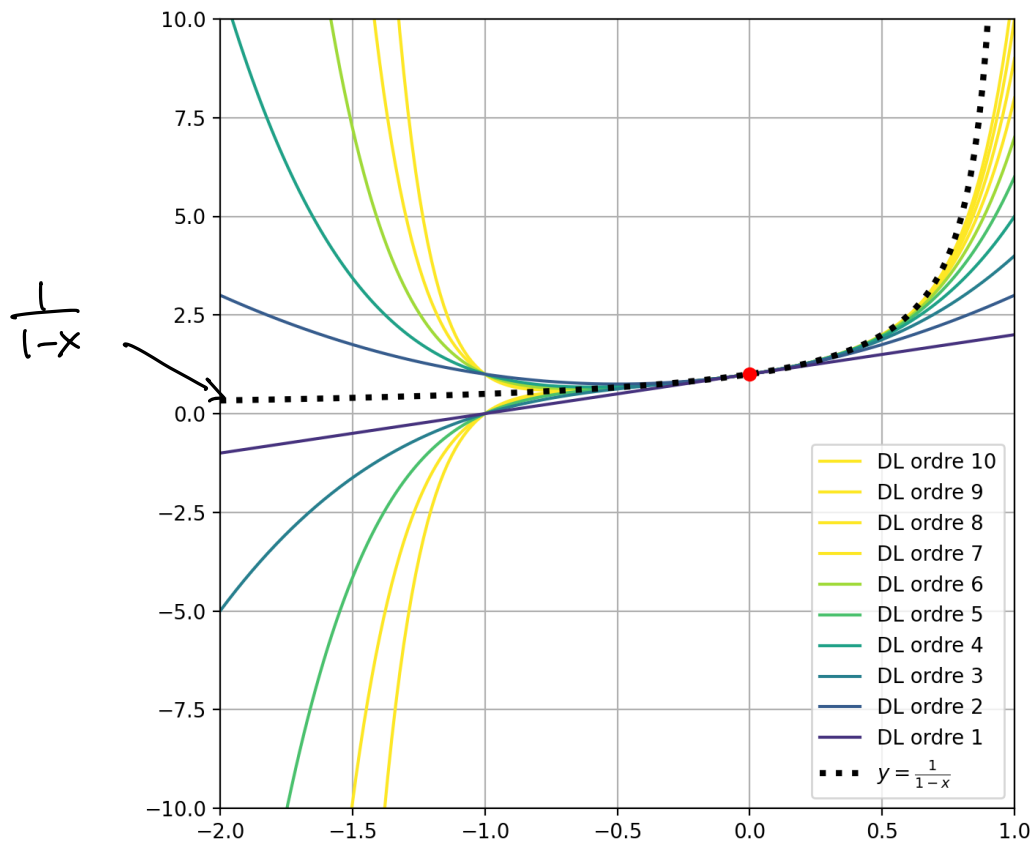
$$\text{Donc } r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (n+1)! (1-u_{n,x})^{-n-2} x^{n+1} = \frac{1}{1-u_{n,x}} \left(\frac{x}{1-u_{n,x}} \right)^{n+1}$$

Soit $I =]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$. Pour $x \in I$, on a $u_{n,x} \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ et donc

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right)^{n+1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

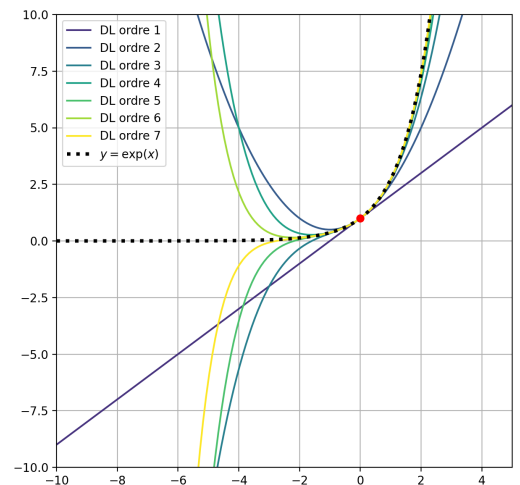
Donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n x^k + r_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k + \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k + 0 \quad \text{pour } x \in \left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[.$$



Avec une méthode similaire (avec $x_0 = 0$), on trouve les développements en séries entières suivants :

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \quad x \in]-1, 1[$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k, \quad x \in]-1, 1[$
- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in]-1, 1[$
- $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}$



$$\cdot \sinh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot \cosh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}^*) \cdot (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in]-1, 1[.$$

Aparté : l'exponentielle complexe et la formule d'Euler

On peut définir l'exponentielle complexe pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (\text{converge pour tout } z \in \mathbb{C})$$

On peut vérifier que $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Pour $z = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \exp(i\theta) &= 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = \pi$, on obtient : $e^{i\pi} = -1$ (identité d'Euler).

⚠ Toute fonction de classe C^∞ n'est pas nécessairement développable en série entière. Voyons un contre-exemple :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On a $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, en effet (le seul point délicat est $x_0 = 0$):

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow f \in C^0(\mathbb{R})$$

$$(ii) f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \end{cases}$$

Détail: posons $y = \frac{1}{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}}{1/y^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$ (croissances comparées)

Donc par le thm. de continuité de la dérivée, $f'(0) = 0$. Ainsi $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(iii) On peut montrer ainsi, par récurrence que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.

fin 02/12
←