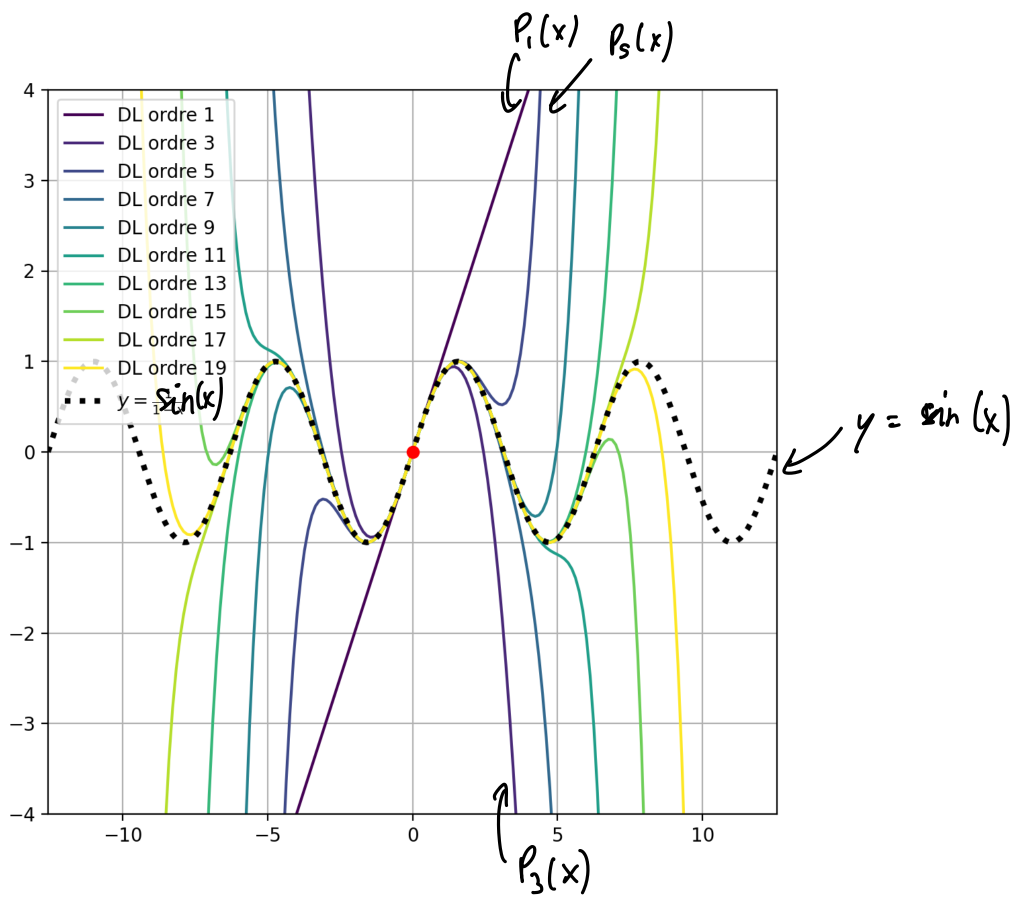
<u>Exemple</u> : Prenons $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$.

- $a_0 = \frac{1}{0!} f^{(0)}(0) = 0$ et $P_0(x) = 0$
- $a_1 = \frac{1}{1!} f^{(1)}(0) = 1$ et $P_1(x) = 0 + 1 \cdot x = x$
- $a_2 = \frac{1}{2!} f^{(2)}(0) = \frac{1}{2}(-\sin(0)) = 0$ et $P_2(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = x$
- $a_3 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{1}{6}(-\cos(0)) = \frac{-1}{6}$ et $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$



fin 25/11

7.2 DL usuels (⚠ À connaître)

Par un calcul analogue à celui fait pour sin on a les DL suivants en 0 :

$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, $f'(x) = (-1) \cdot (-1) \cdot (1-x)^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2) \cdot (1-x)^{-3}$, etc...

$f^{(n)}(x) = n! \, (1-x)^{-n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Donc $\frac{1}{1-x} = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Se retrouve en écrivant : $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} + \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x)$

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$ $(DL_{2n+1}(0))$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$ $(DL_{2n}(0))$

- $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$

Exemple d'application au calcul de limites

Dans la suite $\varepsilon(x)$ représente une fonction qui satisfait $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

⚠ Cette fonction peut changer d'une expression à l'autre.

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x + x\varepsilon(x)}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + \varepsilon(x)) = 1$

2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{2} + \varepsilon(x) = \dfrac{1}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{\exp(x^4\cos(e^{1/x^2})) - 1}{x}$ en $x_0 = 0$?

Soit $g(x) = x^4\cos(e^{1/x^2})$, on a $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (par le Thm. des gendarmes).

On a $\exp(u) = 1 + u + u\cdot\varepsilon(u)$

Donc $f(x) = \dfrac{\exp(g(x)) - 1}{x} = \dfrac{1 + g(x) + g(x)\cdot\varepsilon(g(x)) - 1}{x} = x^3\cos(e^{1/x^2})(1 + \varepsilon(g(x)))$

Comme $\begin{cases} \lim_{x\to 0} \varepsilon(g(x)) = 0 & \text{(composition de limites)} \\ \text{et } \lim_{x\to 0} x^3\cos(e^{1/x^2}) = 0 & \text{(par Thm. les gendarmes).} \end{cases}$

On conclut : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

7.3 Composition et produit de DL

1/ $DL_3(0)$ de $x \to \frac{1}{\cos(x)}$

On a $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+(\cos(x)-1)} = f(g(x))$

avec $\begin{cases} f(u) = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\varepsilon_1(u) \\ g(x) = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x) \end{cases}$

$$\text{Donc } \frac{1}{\cos(x)} = f(g(x)) = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x)\right)^2\Big(1 + \overbrace{\varepsilon_2\left(-\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x)\right)}^{\xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ (compositi}^{\circ}\text{)}}\Big)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - x^3\varepsilon_1(x) + \left(\frac{x^4}{4} - x^5\varepsilon_1(x) + x^6\varepsilon_1(x)^2\right)(1 + \varepsilon_3(x))$$

prendre le temps de bien comprendre le passage.

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_4(x)$$

où $\varepsilon_4(x) = -\varepsilon_1(x) + \left(\frac{x}{4} - x^2\varepsilon_1(x) + x^3\varepsilon_1(x)^2\right)(1 + \varepsilon_3(x))$ satisfait bien $\lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0$

il n'est pas nécessaire de donner cette expression qd on a compris comment ça marche

2/ DL_3 de tangente en 0 :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{2}\varepsilon_1(x)\right) + x^3\varepsilon_2(x)\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right)$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + x^3\varepsilon_3(x)$$

où $\varepsilon_3(x) = \varepsilon_1(x) - \frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{2}\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right)$

satisfait bien $\varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Ainsi $\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon_3(x)}$

N.B. : On aurait pu retrouver ce DL à l'aide de la formule de Taylor :

$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = \cos(x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = (-2)(-\sin(x))\cdot\cos(x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 2\cos(x)\cos(x)^{-3} + 2\sin(x)(-\sin(x))\cdot\cos(x)^{-4}\cdot(-3) \Rightarrow f'''(0) = 2$

Donc la formule de Taylor donne :

$$\tan(x) = 0 + 1\cdot x + 0\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{2}{3!}\cdot x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

cohérent avec le calcul ci-dessus.

7.3 Séries entières

Def : Une série entière est une série de la forme

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

(convention $0^0 = 1$)

avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ un paramètre. Plus généralement, on peut rencontrer des séries entières de la forme :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$.

Rmq : on pourra se ramener au cas $x_0 = 0$ par un changement de variable.

$$y = x - x_0$$

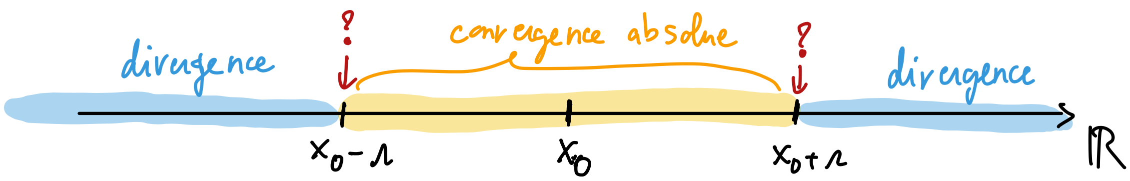
Questions : convergence et valeur de la somme en fonction de x ?

Thm : Il existe $r \in [0, +\infty]$ (signifie soit $r \in \mathbb{R}_+$ soit $r = +\infty$) tel que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$

- converge absolument pour $|x - x_0| < r$.
- et diverge pour $|x - x_0| > r$.

Remarques :

- le nombre r est appelé le rayon de convergence de la série entière.
- le Thm. ne dit rien pour le cas $|x - x_0| = r$.
- si $r = +\infty$: la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$
  si $r = 0$: la série ne converge que pour $x = x_0$ (et alors $S = a_0$)



fin 28/11